CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 14 giugno 2004

SOLUZIONE

Problema 1

La specifica a) implica che il sistema di controllo deve avere almeno tipo 2. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; tale polo garantirà anche astatismo rispetto al disturbo costante sull'ingresso del processo. Resta quindi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{0.1 \cdot |K_G|} \leq 0.14 \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 71.43$$

Si ponga $K_G = 71.5 \approx 37$ dB (si è scelto il segno positivo per non pregiudicare la stabilità ad anello chiuso). Nel seguito della sintesi, non sarà possibile diminuire K_G, pena la violazione del limite sull'errore.

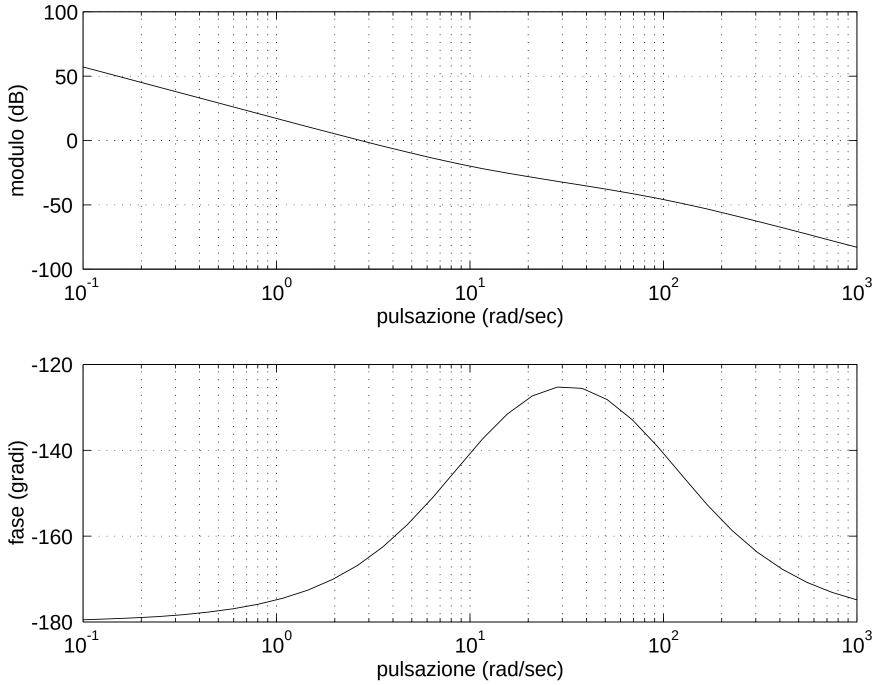
Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s}\, R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = \frac{K_G}{s}\, P(s) = 7.15\, \frac{1+0.1s}{s^2(1+0.01s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ (vedi figura seguente) indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

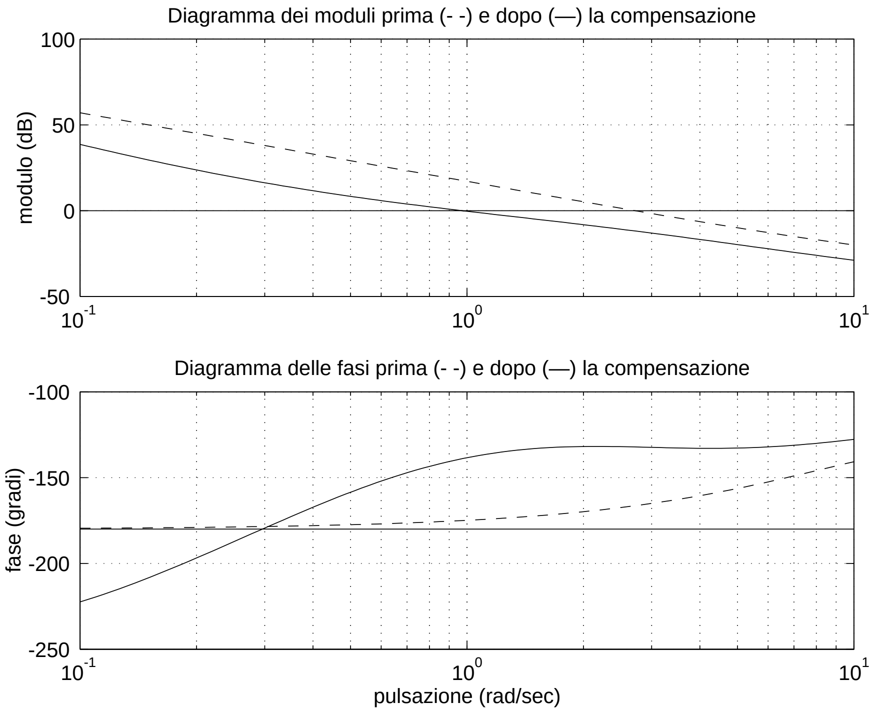
$$|\hat{F}(j1)| \approx 17\text{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -174°$$

Per dedurre tali valori non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti si ha $|\hat{F}(j1)| = K_{\hat{F}} = 7.15 \approx 17$ dB (per costruzione, essendo presenti poli nell'origine) e $\angle F(j1) \approx -180° + 6° = -174°$ (correzione del diagramma asintotico dello zero una decade prima della pulsazione di rottura, pari a 10).



Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 17 dB e un anticipo di almeno 34° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 6$ in $\omega\tau = 2$ (e quindi $\tau = 2$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di 45° e un'amplificazione di 7 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 16$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in



$\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $45° - 9° = 36°$ e un'attenuazione netta di $7\text{dB} - 24\text{dB} = -17\text{dB}$. L'effetto della compensazione è evidente nella figura successiva.

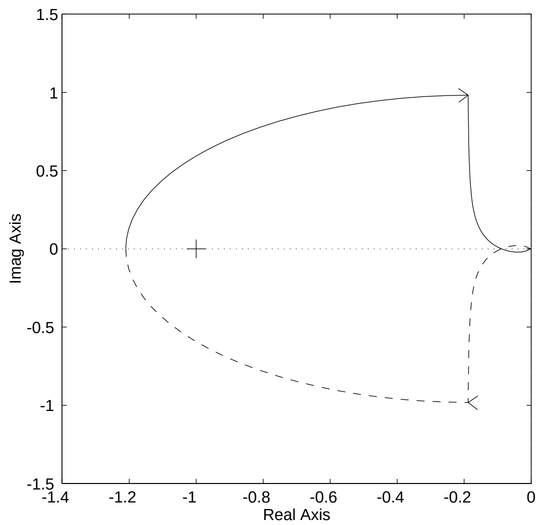
In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{71.5}{s^2} \, \frac{1 + 2s}{1 + \dfrac{1}{3}s} \, \frac{1 + \dfrac{50}{8}\,s}{1 + 100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 0.97 rad/sec e 41°.

Problema 2

Si osservi innanzitutto che $n_F^+ = 1$. Assumendo $k = 1$, il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ è il seguente (si noti la chiusura all'infinito in senso orario).



Poiché il diagramma effettua un giro in senso *orario* intorno al punto critico, il criterio di Nyquist indica che il sistema ad anello chiuso è instabile. Tuttavia, aumentando sufficientemente il valore di k il diagramma effettuerà un giro in senso *antiorario* intorno al punto critico: si avrà quindi stabilità asintotica ad anello chiuso. Per $K < 0$, il diagramma non effettua alcun giro intorno al punto critico, e il sistema è sempre instabile ad anello chiuso.

Per ricavare il valore critico di k, si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$:

$$d_W(s) = s^3 + 9s^2 + (k-10)s + k$$

La tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-10 \\ 2 & 9 & k \\ 1 & 8k-90 & \\ 0 & k & \end{array}$$

Il valore critico di k è dunque pari a 90/8.

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax+Bu$, $y = Cx+Du$ la cui matrice dinamica ha due autovalori: $\lambda_1 = -1$, raggiungibile ma non osservabile, e $\lambda_2 = 1$, non raggiungibile ma osservabile. Allora:

  ○ la sua funzione di trasferimento è nulla;
  FALSO: In generale $W(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$, e non essendoci autovalori raggiungibili e osservabili il primo termine è nullo. Il secondo però (legame diretto ingresso-uscita) potrebbe essere diverso da zero.

  ○ la sua funzione di trasferimento è nulla solo se $D = 0$;
  VERO: Vedi risposta precedente.

  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato diverge;
  VERO: Tutte quelle allineate con l'autovettore v_2 corrispondente a λ_2.

  ○ ci sono infinite condizioni iniziali per cui l'evoluzione libera nello stato converge;
  VERO: Tutte quelle allineate con l'autovettore v_1 corrispondente a λ_1.

  ○ se $D = 0$, l'uscita del sistema è nulla per qualsiasi condizione iniziale.
  FALSO: Anche se la funzione di trasferimento è nulla, c'è una risposta libera non nulla perché il secondo autovalore è osservabile.

- Si consideri il sistema ottenuto chiudendo in retroazione unitaria una funzione di trasferimento $F(s)$ costituita da un guadagno positivo, uno zero a parte reale positiva e due poli a parte reale negativa. Allora:

  ○ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per qualsiasi valore del guadagno;
  FALSO: la fase di $F(s)$ tende a $-270°$ e quindi per guadagni sufficientemente elevati il margine di fase diventa negativo.

  ○ il sistema retroazionato diventa instabile per valori sufficientemente alti del guadagno;
  VERO: Vedi risposta precedente.

  ○ il sistema retroazionato può avere guadagno unitario;
  FALSO: Questo vorrebbe dire che il sistema retroazionato è di tipo maggiore di 0; ma in $F(s)$ non ci sono poli nell'origine, e dunque il sistema retroazionato è di tipo 0.

  ○ la risposta indiciale del sistema retroazionato può presentare oscillazioni smorzate;
  VERO: Ciò accade se i due poli del sistema ad anello chiuso sono complessi.

  ○ la risposta indiciale del sistema retroazionato ha una sovraelongazione tanto minore quanto più alto è il guadagno.
  FALSO: Al crescere del guadagno il margine di fase diminuisce; di conseguenza, il modulo alla risonanza e quindi la sovraelongazione crescono.