CONTROLLI AUTOMATICI I modulo
Prova scritta del 5 dicembre 2005

Traccia di soluzione

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+10)} = -\frac{1}{10}\frac{1-s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

Poiché il processo non ha poli a parte reale positiva, la prima specifica è garantita da quella sul margine di fase. La seconda specifica richiede che il sistema di controllo sia almeno di tipo 1 e astatico rispetto al disturbo, che agisce sull'ingresso del processo. Questo conduce all'aggiunta di un polo nell'origine nel controllore; resta poi da garantire che l'errore a regime resti nel limite assegnato, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|K_F|} = \frac{1}{|K_P K_G|} = \frac{1}{|-0.1 \cdot K_G|} \leq \frac{1}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad |K_G| \geq 100$$

Si ponga $K_G = -100$ (si è scelto il segno negativo per rendere K_F positivo).

Si ha quindi

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}(s) = 10\frac{1-s}{s(1+s)(1+0.1s)}$$

I diagrammi di Bode di $\hat{F}(s)$ indicano che in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_t^* = 1$ si ha

$$|\hat{F}(j1)| \approx 20\,\mathrm{dB} \qquad\qquad \angle F(j1) \approx -186^\circ$$

Si noti che per dedurre il valore della fase non è necessario un tracciamento accurato dei diagrammi: infatti si ha $\angle F(j1) \approx -90^\circ - 45^\circ - 45^\circ - 6^\circ$ (polo nell'origine + contributo del polo in -1 in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + contributo dello zero in $+1$ in corrispondenza alla sua pulsazione di rottura + correzione del diagramma asintotico dello polo in -10 una decade prima della pulsazione di rottura).

Poiché la compensazione deve fornire un'attenuazione di 20 dB e un anticipo di almeno 26° in $\omega_t^* = 1$, è necessario usare in modo combinato la funzione anticipatrice e quella attenuatrice.

Dai diagrammi universali, una possibile scelta per la funzione anticipatrice è $m = 6$ in $\omega\tau = 1$ (e quindi $\tau = 1$), che in $\omega_t^* = 1$ fornisce all'incirca un anticipo di 36° e un'amplificazione di 3 dB. Per completare il progetto si può usare la funzione attenuatrice $m = 14$ in $\omega\tau = 100$ (e quindi $\tau = 100$); si ottiene così in $\omega_t^* = 1$ un anticipo netto di $36^\circ - 8^\circ = 28^\circ$ e un'attenuazione netta di $23\mathrm{dB} - 3\mathrm{dB} = 20\mathrm{dB}$.

In conclusione, il controllore progettato ha funzione di trasferimento

$$G(s) = -\frac{100}{s}\,\frac{1+s}{1+\frac{1}{6}s}\,\frac{1+\frac{100}{14}s}{1+100s}$$

Il valore effettivo di pulsazione di attraversamento e margine di fase (valutato ad esempio con l'istruzione `margin` di MATLAB) risulta essere rispettivamente di 1 rad/sec e 22,4°.

Problema 2

La funzione di trasferimento del processo, calcolata durante la soluzione del Problema 1, consente di concludere immediatamente che gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -10$, e che sono entrambi raggiungibili e osservabili (sono diventati poli). Gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \frac{1}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 \qquad \text{da cui l'evoluzione libera è} \qquad x_0 = \frac{1}{9}e^{-t}v_1 + \frac{1}{9}e^{-10t}v_2$$

La risposta forzata richiesta è

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+1)(s+10)}\cdot\frac{2}{s}\right)\left[\frac{3}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/5}{s}+\frac{4/9}{s+1}+\frac{-11/45}{s+10}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{5}+\frac{4}{9}e^{-t}-\frac{11}{45}e^{-10t}\right)\delta_{-1}(t)
\end{aligned}
$$

Infine, essendo il processo asintoticamente stabile, la risposta a regime permanente esiste e assume la forma canonica di polinomio completo di ordine 1:

$$
y_r(t) = 3M_0 1\,t + 3M_1 \qquad \text{con} \qquad M_0 = P(0) = -\frac{1}{10} \qquad M_1 = \left(\frac{dP(s)}{ds}\right)_{s=0} = \frac{1}{100}
$$

Problema 3

- Si consideri il sistema a retroazione unitaria avente funzione di trasferimento $F(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)}$ sul ramo diretto.

  ○ Per $k > 0$, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
  FALSO: Basta calcolare il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s) = F(s)/(1+F(s))$ per verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se $k > 2$.

  ○ Per $k > 0$, il diagramma di Nyquist di $F(j\omega)$ non effettua alcun giro intorno al punto critico.
  FALSO: Poiché $F(s)$ ha un polo a parte reale positiva, la risposta del punto precedente garantisce che per $k > 2$ il diagramma effettua un giro in senso orario intorno al punto critico.

  ○ Per $k = 1$, la risposta a regime del sistema retroazionato per un ingresso a gradino unitario vale -1.
  FALSO: Poichè il sistema retroazionato è instabile per $k = 1$, esso non ammette risposta a regime permanente

  ● La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sull'uscita* di $F(s)$ tende a zero per $k \to \infty$.
  VERO: È una proprietà ben nota (si noti che per $k \to \infty$ il sistema retroazionato diviene asintoticamente stabile e ammette regime permanente).

  ○ La risposta a regime del sistema retroazionato a un disturbo costante *sul ramo di reazione* tende a zero per $k \to \infty$.
  FALSO: La funzione di trasferimento di un disturbo sul ramo di reazione è pari a $-W(s)$, dove si è indicata con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

- Si consideri un sistema lineare strettamente causale con due autovalori: $\lambda_1 = -2$, osservabile ma non raggiungibile, e $\lambda_2 = 2$, non osservabile ma raggiungibile.

  ● La funzione di trasferimento è nulla.
  VERO: Infatti da una parte la funzione di trasferimento del sistema deve essere strettamente propria (conseguenza dell'ipotesi di stretta causalità), dall'altra nessuno dei due autovalori diviene polo.

  ○ Esiste un unico stato iniziale non nullo da cui l'evoluzione libera nello stato converge.
  FALSO: L'evoluzione libera converge a partire dagli *infiniti* stati iniziali allineati con l'autovettore relativo a $\lambda_1 = -2$.

  ● Non esistono stati iniziali da cui la risposta libera diverge.
  VERO: Infatti l'autovalore $\lambda_2 = 2$ è inosservabile, e dunque non compare mai nella risposta (né libera né forzata).

  ○ La risposta impulsiva diverge.
  FALSO: Vedi risposta precedente.

  ● È impossibile stabilizzare il sistema attraverso uno schema a retroazione dall'uscita.
  VERO: L'autovalore $\lambda_2 = 2$ è nascosto, e dunque non viene spostato da alcuna retroazione.