**CONTROLLI AUTOMATICI II modulo**
**Prova scritta del 15 aprile 2005**

# TRACCIA DI SOLUZIONE

### Problema 1

Per evitare la cancellazione polo-zero, che darebbe luogo a un autovalore nascosto instabile, si ricorre ad uno schema con un doppio anello di retroazione. Allo scopo di limitare la dimensione del controllore, si prova a risolvere il problema con due semplici guadagni: quello più interno, $k_2$, viene collocato sul ramo diretto a monte del primo blocco della cascata, mentre quello più esterno, $k_1$, si trova sul ramo diretto a monte dell'anello interno.

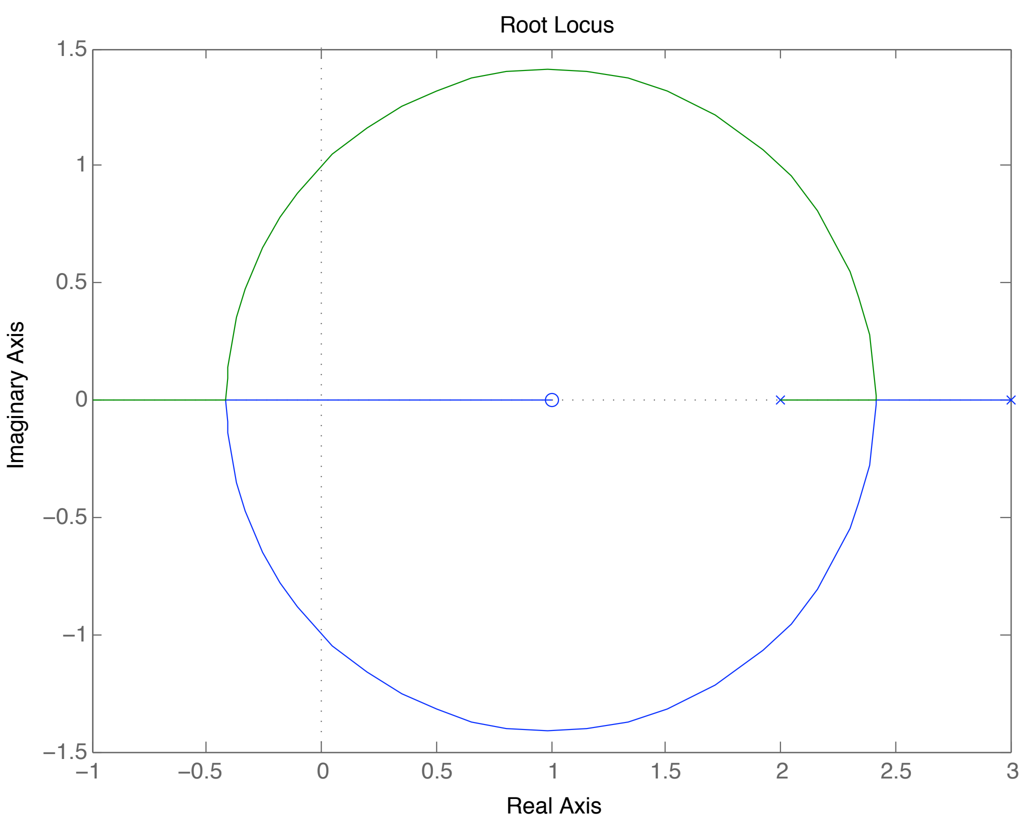
La funzione di trasferimento dell'anello interno è

$$F_1(s) = \frac{k_2}{s + k_2 - 1} = \frac{k_2}{s - p}$$

con $p = 1 - k_2$. La funzione di trasferimento del ramo diretto diviene dunque

$$F(s) = k_1 F_1(s) \frac{s-1}{s-2} = k_1 k_2 \frac{s-1}{(s-p)(s-2)} = k \frac{s-1}{(s-p)(s-2)}$$

dove si è posto $k = k_1 k_2$. Il tracciamento del corrispondente luogo delle radici mostra immediatamente che è necessario avere $p > 1$ (cioè $k_2 < 0$) per creare un punto singolare nel luogo positivo contenuto nel semipiano destro e sperare di ottenere una situazione come quella di figura, in cui l'altro punto singolare si trova nel semipiano sinistro (qui si è posto $p = 3$ per illustrazione).




Indicazioni più precise si possono trarre dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso, che vale

$$D_W(s) = s^2 + (k - p - 2)s + 2p - k$$

Si ha stabilità asintotica se $k - p - 2 > 0$ e $2p - k > 0$, cioè se

$$k > 2 + p \qquad \text{e} \qquad k < 2p$$

Quindi, è necessario avere

$$2 + p < p \qquad \Rightarrow \qquad p > 2$$

che è una condizione più stringente di quella ricavata dall'analisi del luogo. Di conseguenza, *qualsiasi* collocazione del polo $p$ a destra di 2 crea una situazione come quella in figura, in cui l'altro punto singolare del luogo positivo si trova nel semipiano sinistro.

Scelto dunque $k_2 < -1$ per avere $p > 2$, si deve imporre $2 + p < k < 2p$ ovvero

$$\frac{2(1 - k_2)}{k_2} < k_1 < \frac{3 - k_2}{k_2}$$

Per ottenere che i poli del sistema ad anello chiuso siano a parte reale negativa e coincidenti, è necessario scegliere $k$ in corrispondenza al punto singolare che si trova nel semipiano sinistro, che vale $s_1 = 1 - \sqrt{p - 1}$ (dall'equazione dei punti singolari). Tale valore di $k$ si può individuare imponendo dunque che il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso valga $(s - s_1)^2$. Uguagliando i coefficienti dei due polinomi si ottiene

$$k = p + 2\sqrt{p - 1}$$

che, per ogni valore scelto per $p > 2$ (e dunque per $k_1$), fornisce il valore di $k$ (e dunque di $k_1$) richiesto.

## Problema 2

*a)* Il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità, e l'autovalore $\beta$ non è raggiungibile. Quindi, deve essere necessariamente $\beta < 0$ per avere stabilizzabilità con reazione dallo stato. Il determinante della matrice di raggiungibilità 'ristretta'

$$\det P_1 = \det(B_1 \;\; A_{11}B_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 - \alpha$$

è diverso da zero se $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$, c'è un altro autovalore non raggiungibile. In questo caso, poiché gli autovalori di $A_{11}$ sono $\alpha$ (cioè 1) e 2, tale autovalore è certamente positivo, e dunque il sistema non è stabilizzabile con reazione dallo stato. Riassumendo, il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\beta < 0$.

Per quanto riguarda la rilevabilità, si verifica facilmente che il sistema è osservabile se $\beta \neq 2$. D'altra parte, se $\beta = 2$ il sistema ha due autovalori in 2; poiché l'altro autovalore in $\alpha$ è osservabile (si verifica immediatamente dal PBH test), uno di questi due autovalori è inosservabile, e dunque il sistema non è rilevabile. Ciò indica anche che se il sistema è stabilizzabile con reazione dallo stato lo è anche con reazione dall'uscita (infatti $\beta < 0$ garantisce che $\beta \neq 2$).

*b)* Se $\alpha \neq 1$ e $\beta < 0$, le retroazioni che stabilizzano il processo hanno la forma $u = Kx$, con $K = (k_1 \, k_2 \, k_3)$ e $k_3$ ininfluente. Quindi basta risolvere il problema di stabilizzazione 'ristretta' assegnando autovalori a parte reale negativa alla matrice

$$A_{11} + B_1(k_1 \, k_2)$$

il cui polinomio caratteristico risulta essere

$$\lambda^2 - (k_1 + k_2 + \alpha + 2)\lambda + k_1 + \alpha k_2 + 2\alpha$$

Quindi, la condizione affinché gli autovalori abbiano parte reale negativa è

$$k_1 + k_2 + \alpha + 2 < 0 \quad \text{e} \quad k_1 + \alpha k_2 + 2\alpha > 0$$

mentre $k_3$ può essere scelto arbitrariamente.

**Problema 3**

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
FALSO: Il sistema è sempre osservabile (la matrice di osservabilità ha sempre rango pieno),

● È possibile stabilizzare il sistema dall'uscita solo se $b < 0$.
VERO: Infatti questa è la condizione necessaria (e sufficiente) per avere stabilizzabilità dallo stato (si osservi che il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità, e in particolare l'autovalore $b$ non è raggiungibile). Poiché il sistema è sempre osservabile, tale condizione è anche necessaria (e sufficiente) per la stabilizzabilità dall'uscita.

● Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
VERO: In questo caso, infatti, è possibile stabilizzare il sistema con (infinite) retroazioni dallo stato $u = Kx$, con $K = (k_1\ k_2)$. Poichè l'autovalore $b$ non è raggiungibile, la costante $k_2$ è ininfluente, e si può porre $k_2 = 0$. Dunque esistono (infiniti) controllori stabilizzanti della forma $u = k_1 x_1 = k_1 y$ (si osservi l'equazione di uscita del processo).

○ Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.
FALSO: L'autovalore $b$ non è raggiungibile, quindi è impossibile spostarlo con una retroazione.

○ Lo sforzo di controllo per un controllore dinamico dall'uscita è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di convergenza dell'errore di osservazione.
FALSO: Lo sforzo di controllo dipende dalla dinamica del processo controllato, e cioè dagli autovalori di $A + BK$.

- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli $p_1$, $p_2$, $p_3$ e uno zero $z$.

● Se i poli sono reali, il luogo delle radici ad anello chiuso presenta almeno un punto singolare.
VERO: Infatti, con tre poli reali ed uno zero ci saranno sempre due poli 'contigui' sull'asse reale. Ciò darà luogo a un punto singolare nel segmento compreso tra i due poli.

● Esiste un controllore stabilizzante di dimensione 1.
VERO: Infatti, essendo il sistema a fase minima con eccesso poli-zeri pari a 2, è sempre possibile spostare il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario) con una coppia polo-zero, e poi garantire la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto.

● Esiste un controllore di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si procede così: si inserisce nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1, poi con una coppia polo-zero si sposta il centro degli asintoti nel semipiano sinistro (se necessario), e infine si garantisce la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 2.

● Se $\sum_i p_i - z < 0$, esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si osservi che se $\sum_i p_i - z < 0$ il centro degli asintoti $s_0 = (\sum_i p_i - z)/2$ è certamente negativo. Quindi, si procede così: si inserisce dapprima nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1. Il nuovo centro degli asintoti $s_0' = (\sum_i p_i - z)/3$ è ancora negativo. Dunque, aggiungendo uno zero $z'$ nel semipiano sinistro ma sufficientemente vicino all'origine si recupera un eccesso poli-zeri pari a 2, garantendo nel contempo che il centro degli asintoti finale $s_0'' = (\sum_i p_i - z - z')/2$ sia ancora negativo. A questo punto si assicura la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 1.

○ Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.
FALSO: Un controllore che soddisfi le specifiche deve avere 1 polo nell'origine e $n - 1 = 2$ poli liberi; di conseguenza, esso avrà dimensione 3.