CONTROLLI AUTOMATICI II modulo
Prova scritta del 6 luglio 2005

TRACCIA DI SOLUZIONE

Problema 1

La funzione di trasferimento del processo (a fase minima) è

$$P(s) = \frac{s+4}{s}$$

La specifica sulla riproduzione del riferimento richiede l'introduzione nel controllore di una coppia di poli complessi e coniugati in $\pm j$. La funzione di trasferimento del processo modificato diviene dunque

$$\hat{F}(s) = k\frac{s+4}{s(s^2+1)}$$

Il tracciamento del corrispondente luogo delle radici suggerisce che non esiste alcun valore di k che renda asintoticamente stabile il sistema ad anello chiuso. Ciò è confermato dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$D_{\hat{W}}(s) = s^3 + (k+1)s + 4k$$

che è privo del termine di secondo grado.

Per mantenere minima la dimensione del controllore, si può aggiungere ad esso uno zero con parte reale negativa (si noti che il controllore rimane realizzabile). In questo modo, l'eccesso poli-zeri scenderà a 1 e il sistema ad anello chiuso sarà *certamente* stabilizzato per valori sufficientemente alti di k. Si ha dunque

$$G(s) = k\frac{s+z}{s^2+1}$$

e

$$F(s) = k\frac{(s+4)(s+z)}{s(s^2+1)}$$

L'applicazione del criterio di Routh mostra immediatamente che si ha stabilità asintotica per

$$z > 0 \qquad k > \max\left(0, \frac{4z-1}{z+4}\right)$$

Ciò indica che, a seconda che z sia minore o maggiore di $1/4$, il luogo positivo delle radici sarà interamente o parzialmente compreso nel semipiano sinistro.

Problema 2

La soluzione più ovvia è quella di scrivere un sistema che sia in forma canonica di Kalman rispetto a entrambe le proprietà strutturali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La funzione di trasferimento corrispondente è

$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

con un autovalore nascosto in -1. Per far sì che gli autovalori ad anello chiuso coincidano, è dunque sufficiente usare uno schema a retroazione negativa unitaria in cui il controllore è un semplice guadagno k tale che

$$D_W(s) = s - 2 + k \equiv s + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 3$$

Problema 3

- Si consideri un sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ È possibile stabilizzare il sistema dallo stato solo se $b < 0$.
FALSO: Il sistema è sempre raggiungibile (la matrice di raggiungibilità ha sempre rango pieno).

● È possibile costruire un osservatore del sistema solo se $b < 0$.
VERO: Infatti questa è la condizione necessaria (e sufficiente) per avere rilevabilità dallo stato (si osservi che il sistema è in forma canonica di Kalman rispetto all'osservabilità, e in particolare l'autovalore b non è osservabile), e quindi per poter costruire un dispositivo in grado di fornire una stima asintoticamente corretta dello stato del sistema.

● Se $b < 0$, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
VERO: In questo caso, infatti, la funzione di trasferimento del sistema è $P(s) = 1/(s - a)$, e l'autovalore nascosto in b ha parte reale negativa. Dunque, uno schema a retroazione unitaria con un semplice guadagno come controllore è in grado di spostare il polo in a nel semipiano sinistro, e di rendere il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile.

○ Indipendentemente dal segno di b, esiste un controllore *istantaneo* dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.
FALSO: Se l'autovalore nascosto in b ha parte reale non negativa, il sistema retroazionato (che contiene il medesimo autovalore) non sarà mai asintoticamente stabile.

○ Se $b < 0$, esiste un controllore dall'uscita in grado di assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.
FALSO: L'autovalore in b è nascosto e dunque non modificabile con una retroazione dall'uscita.

- Si consideri un sistema a fase minima con tre poli reali distinti in p_1, p_2, p_3 e due zeri coincidenti in z ($z \neq p_i$, $i = 1, \ldots, 3$).

○ Il luogo delle radici ad anello chiuso può essere privo di punti singolari.
FALSO: C'è almeno un punto singolare dovuto allo zero 'doppio'.

● Esiste un controllore stabilizzante costituito da un semplice guadagno.
VERO: Infatti, essendo il sistema a fase minima con eccesso poli-zeri pari a 1, è sempre possibile ottenere la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto.

● Esiste un controllore di dimensione 1 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: Si procede così: si inserisce nel controllore un polo nell'origine per rendere il sistema di tipo 1, poi con una zero a parte reale negativa si riconduce l'eccesso poli-zeri a 1, e infine si garantisce la stabilità asintotica con un guadagno sufficientemente alto. Il controllore risultante da questa procedura ha appunto dimensione 1.

● Esiste un controllore strettamente proprio e di dimensione 2 in grado di garantire stabilità asintotica e riproduzione esatta di riferimenti costanti.
VERO: È sufficiente prendere il controllore del punto precedente e aggiungergli un polo a parte reale negativa sufficientemente 'lontano'. Come noto, ciò preserva la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso.

○ Esiste un controllore di dimensione 2 che assegna arbitrariamente i poli ad anello chiuso e garantisce la riproduzione esatta di riferimenti costanti.
FALSO: Un controllore che soddisfi le specifiche deve avere 1 polo nell'origine e $n - 1 = 2$ poli liberi; di conseguenza, esso avrà dimensione 3.