Corso di Laurea in
Ingegneria e Automatica

Corso di RICERCA OPERATIVA

PROVA di AUTOVALUTAZIONE N.7

ESERCIZI

1. Un'industria chimica è divisa in quattro reparti (R1, R2, R3, R4). Ciascuno di essi produce tre componenti base (tipoA, tipoB, tipoC) che vengono utilizzati per fabbricare un prodotto finale da immettere sul mercato. Tale prodotto finale è ottenuto miscelando i componenti base in modo da soddisfare dei requisiti specifici. La tabella che segue riporta i contenuti percentuali di potassio, fosforo, azoto di ciascuno dei componenti base:

	tipoA	tipo B	tipoC
potassio	22%	18%	25%
fosforo	13%	16%	10%
azoto	9%	11%	12%

Il prodotto finale deve avere almeno il 20% di potassio, non piú del 15% di azoto e una percentuale di azoto tra il 10% e il 12%. L'industria ha un piano della produzione settimanale; la massima capacità produttiva settimanale di ciascun reparto (in quintali) rappresentante la massima quantità totale dei tre componenti base che si possono produrre nella settimana da ciascun reparto

	R1	R2	R3	R4
capacità massima	389	470	510	425

Il costo di produzione unitario di ciascun componente (in Euro al quintale) per ciascun reparto è riportato nella tabella seguente:

	tipoA	tipo B	tipoC
R1	20	52	25
R2	21	59	27
R3	19	55	26
R4	20	56	24

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione settimanale, ovvero di determinare le quantità di ciascun componente base da produrre da ciascuno dei reparti per essere utilizzate nella miscela finale, in modo da minimizzare il costo complessivo e in modo che la produzione settimanale sia pari ad almeno 1280 quintali di prodotto finale.

2. Sia dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
&\min -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\
&2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 38 \\
&3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 55 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots 4
\end{aligned}
$$

Dopo averlo posto in forma standard aggiungendo le variabili di slack x_5 e x_6, applicare il criterio di ottimalità e il criterio di illimitatezza considerando la base individuata dalle variabili x_5 e x_6.

3. Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\min -4x_1 + 9x_3 + 12x_4 - 5x_5 + 7x_6 \\
&x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 3 \\
&x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 6 \\
&-x_1 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6
\end{aligned}
$$

si verifichi che le variabili x_1, x_2, x_3 individuano una base ottima e calcolare il valore della soluzione ottima.

4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
&\min -2x_1 - x_2 \\
&x_1 + x_3 = 1 \\
&x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4
\end{aligned}
$$

Sia B_1 la base individuata dalle variabili x_1 e x_4 e sia B_2 la base individuata dalle variabili x_1 e x_2. Calcolare le corrispondenti soluzioni di base x_{B_1} e x_{B_2}. Applicare il criterio di ottimalità ad entrambi le soluzioni di base. Che cosa si può dire delle due soluzioni di base x_{B_1} e x_{B_2} ?

5. Sia dato il problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\min x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
&x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \\
&-2x_1 + x_3 \geq -8 \\
&x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

   (a) Risolvere il problema applicando la fase II del metodo del simplesso.
   (b) Indicare le basi ammissibili e le soluzioni base ammissibili visitate dal metodo.

6. Applicando la fase II del metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare in due variabili fornendo una rappresentazione geometrica dell'insieme ammissibile individuando la sequenza di vertici visitati dal metodo:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

QUESTIONARIO

1. Sia $\bar{\rho}$ definito dal criterio del rapporto minimo all'interno della fase II del metodo del simplesso. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Se la soluzione di base ammissibile corrente è degenere, allora si ha necessariamente $\bar{\rho} = 0$.

   (b) Condizione sufficiente affinché sia $\bar{\rho} = 0$ è che la soluzione di base ammissibile corrente sia degenere.

   (c) Se $\bar{\rho} = 0$ la nuova base ammissibile sarà diversa dalla vecchia.

   (d) Se ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$ corrisponde una componente negativa o nulla di π_h, allora $\bar{\rho} = 0$ (h è l'indice della variabile fuori base che entra in base).

2. In un'iterazione del metodo del simplesso risulta $x_B = (x_1, x_3, x_5)^T$, $x_N = (x_2, x_6, x_7, x_4)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Le variabili x_7 e x_4 sono candidate ad entrare in base.

   (b) Non è soddisfatto il criterio di illimitatezza.

   (c) La soluzione di base corrente non soddisfa il criterio di ottimalità.

   (d) La prossima soluzione di base ammissibile sarà degenere.