



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA  
E AUTOMATICA

ANNO ACCADEMICO 2018-2019

APPUNTI DALLE LEZIONI DI

RICERCA OPERATIVA  
6 CFU

MASSIMO ROMA

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale  
"A. Ruberti"

<http://www.dis.uniroma1.it/~roma/didattica>



# *Prefazione*

Queste note sono redatte in via preliminare ad esclusivo uso degli studenti del corso di “*Ricerca Operativa*” da 6 crediti (CFU) del Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica* della Facoltà di Ingegneria dell’Informazione, Informatica e Statistica della SAPIENZA, Università di Roma.

Molte parti di queste note sono tratte da

1. F. Facchinei, S. Lucidi, M. Roma. *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.
2. M. Roma. *Modelli della Ricerca Operativa*, SAPIENZA – Università di Roma.
3. S. Lucidi, M. Roma. *Modelli e Algoritmi di Programmazione Lineare Intera*, SAPIENZA – Università di Roma.

A completamento degli argomenti svolti in queste note, è disponibile sul sito web del corso

<http://www.dis.uniroma1.it/~roma/didattica>

una raccolta di esercizi svolti in corrispondenza di ogni capitolo ed altro materiale didattico.



# 1

---

## *Introduzione*

### **1.1 CHE COSA È LA RICERCA OPERATIVA**

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente recente. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese “*Operational Research*” o “*Operations Research*” in americano.

La Ricerca Operativa è una disciplina che tratta dello sviluppo e dell'applicazione di metodi scientifici per la soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale. Si tratta di scegliere quali decisioni prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici; quindi lo scopo della Ricerca Operativa è quello di fornire una base scientifica per cercare di analizzare e comprendere situazioni anche con strutture molto complesse e quindi utilizzare queste informazioni per predire il comportamento di un sistema e per migliorare le prestazioni del sistema stesso.

La necessità di un approccio quantitativo ai problemi di decisione è largamente riconosciuto in moltissimi settori della vita reale ed in particolare nei problemi di decisione che si presentano nella gestione dei sistemi di produzione e nella gestione d'impresa. Il semplice “buon senso”, cioè l'impiego di una persona competente del settore che sulla base dell'esperienza acquisita nel corso degli anni gestisca il sistema non è più sufficiente a far fronte alla sempre più crescente complessità organizzativa, e quindi anche decisionale, della gran parte dei sistemi di produzione e servizio. In questo settore, come in molti altri, soprattutto negli ultimi anni, si è acquisita la consapevolezza della necessità di tecniche quantitative basate su sofisticati strumenti matematici e avanzati mezzi informatici che permettano di prendere delle decisioni operative sulla base delle informazioni disponibili.

La Ricerca Operativa, quindi, è la scienza che si occupa di fornire un contesto

unitario a nozioni matematiche, informatiche e che partendo da basi teoriche arriva alla costruzione di modelli concreti e alla loro soluzione cioè ad un confronto diretto con la realtà. In questo senso, un altro termine inglese che solitamente si riferisce alla Ricerca Operativa – *Management Science* – evidenzia gli aspetti piú caratteristici della disciplina: “*management*” cioè la gestione e “*science*” a mettere in evidenza il carattere rigoroso tipico di una scienza.

## 1.2 BREVE STORIA DELLA RICERCA OPERATIVA

Il termine Ricerca Operativa ha origini “ufficiali” legate ad operazioni belliche della Seconda Guerra Mondiale. Tuttavia esistono esempi importanti di anticipazioni dei metodi della Ricerca Operativa in anni piú lontani; il piú famoso risale a F. Taylor che nel 1885 elaborò uno studio sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776, G. Monge aveva studiato un problema di trasporti. Tuttavia la nascita della Ricerca Operativa è storicamente legata agli studi che negli anni immediatamente precedenti alla Seconda Guerra Mondiale vennero condotti in Gran Bretagna per risolvere problemi strategici e tattici in operazioni militari. Piú in particolare questi studi erano legati all’uso efficiente di un nuovo strumento di difesa: il radar. Infatti nel 1937 la Royal Air Force iniziò degli esperimenti di un sistema di controllo della difesa aerea basato sull’uso di una stazione radar situata a Bawdsey Research Station, nella costa est; già dai primi esperimenti si resero conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono compiuti altri esperimenti con l’aggiunta di quattro stazioni radar lungo la costa nella speranza che il sistema di controllo migliorasse sia in copertura sia in efficienza; invece non fu così; dai nuovi esperimenti emersero seri problemi: c’era la necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra di loro, che venivano ricevute dalle stazioni radar aggiunte. Nell’imminenza della Guerra si rese necessario tentare qualche nuovo approccio; perciò il sovrintendente della Bawdsey Research Station propose di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti *operativi* del sistema e non piú solamente quelli prettamente tecnici che erano da considerare soddisfacenti. Il termine “*Operational Research*” – Ricerca nelle operazioni (militari) – fu coniato per descrivere questa nuova branca delle scienze applicate. Fu quindi selezionato un gruppo di scienziati di vari discipline per costituire un “OR team”; il progetto fu diretto dal comandante in capo della Royal Air Force, Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding. Nell’estate del 1939 la Gran Bretagna effettuò l’ultima esercitazione pre-bellica dove si evidenziò un notevole miglioramento nelle operazioni di difesa aerea grazie al contributo del gruppo di scienziati. Nacque quindi una vera e propria sezione che piú tardi, nel 1941, prese il nome formale di “Operational Research Section”. Durante il conflitto mondiale ci furono importanti contributi strategici di questa sezione che permi-

sero di salvare piloti e aerei impegnati nel conflitto. Nonostante gli scopi bellici, anche se di difesa, del progetto, per la prima volta in questa occasione si ebbe una convergenza di scienziati di diverse discipline con l'obiettivo di determinare la più efficiente utilizzazione di risorse limitate usando tecniche quantitative.

Al termine della guerra, alcuni degli scienziati coinvolti nel progetto formarono nuclei di ricercatori per lo sviluppo post bellico e la loro attività si estese a campi diversi da quello militare; in particolare, con l'espandersi delle iniziative industriali e con l'avvento dei computer che sono uno strumento essenziale per la risoluzione dei problemi, c'è stata un'espansione dell'utilizzo della Ricerca Operativa all'interno di diverse realtà applicative.

Negli anni '60 le tecniche della Ricerca Operativa avevano avuto una buona diffusione, ma comunque il loro utilizzo era limitato esclusivamente alle imprese più grandi visti gli altissimi costi dei calcolatori elettronici dell'epoca; più tardi, con la diffusione dei personal computer c'è stata una diffusione sempre più ampia della Ricerca Operativa in molti ambiti della vita reale.

### 1.3 LA RICERCA OPERATIVA OGGI

La necessità dell'uso dei metodi della Ricerca Operativa all'interno di molteplici situazioni del mondo reale è stata col passare degli anni sempre più riconosciuta con una sempre maggiore e rapida espansione delle aree di possibile applicazione. In particolare, gli ambiti di maggiore sviluppo dell'applicazione Ricerca Operativa riguardano *problemi manageriali*, *problemi gestionali*, *problemi di progettazione*. Alcuni esempi di problemi possono essere affrontati per mezzo della Ricerca Operativa sono i seguenti:

- *Problemi in ambito industriale:*
  - *pianificazione della produzione;*  
si tratta di determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; si hanno spesso problemi di *allocazione ottima di risorse* cioè problemi riguardanti la distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo complessivo o massimizzare il guadagno totale; tali risorse possono essere materie prime, manodopera, tempi di lavoro su macchine, capitali investiti.
  - *gestione ottima delle scorte;*  
si tratta di organizzare un magazzino nella gestione di materiali grezzi, prodotti in lavorazione etc.; cioè di decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi, oppure se e quando conviene riordinare materiali in modo da ottenere il miglior compromesso tra costi di acquisto, di produzione e di immagazzinamento.

- *localizzazione e dimensionamento di impianti;*  
sono problemi in cui si deve decidere dove installare impianti di produzione in modo da rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, oppure decidere dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) per coprire il territorio e con quale potenza esse devono trasmettere.
- *Problemi di progettazione ottima:*
  - *progettazione di reti e loro gestione;*  
si tratta di definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo;
  - *progettazione strutturale;*  
si tratta di problemi che nascono nell'ingegneria civile, industriale, nella meccanica aeronautica, etc. e hanno come scopo quello di definire un progetto di un edificio, di un ponte in modo che meglio resistano a sollecitazioni derivanti da vari agenti (terremoti, venti forti) oppure del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza;
  - *progettazione di sistemi ottici, progettazione di robot;*  
si vuole ottenere un progetto che risponda a requisiti tecnici prefissati massimizzando alcuni parametri legati, ad esempio, alla precisione o alla prestazione;
  - *allocazione ottima di componenti elettronici (VLSI design);*  
si tratta di disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici;
- *Problemi di economia e finanza:*
  - *scelta di investimenti;*  
si deve scegliere fra un vasto numero di possibilità di investimento quali realizzare rispettando i vincoli imposti da un budget finanziario e massimizzando il guadagno;
  - *composizione di un portafoglio;*  
è il problema di decidere quali titoli e con quali quote investire capitali in modo da massimizzare il ricavo oppure minimizzando il rischio;



- *Problemi di organizzazione:*
  - *project planning;*  
si tratta di decidere come gestire le risorse e come sequenziare le molteplici attività di un progetto;
  - *determinazione dei turni del personale;*  
si tratta di coprire una serie di servizi rispettando i vincoli di contratto aziendale e minimizzando i costi, come, ad esempio, l’assegnamento di personale viaggiante ai treni o degli equipaggi ai voli in modo da minimizzare il numero dei viaggi necessari per far tornare il personale nella propria sede;
  - *manutenzione di beni;*  
cioè il problema di decidere quando e se effettuare la manutenzione di alcuni oggetti soggetti ad usura con il tempo, in modo da minimizzare il costo complessivo.
  - *istadamento di veicoli;*  
si deve decidere quali percorsi devono seguire i veicoli di un flotta (ad esempio di automezzi adibiti alla raccolta dei rifiuti o alla distribuzioni di prodotti ad una rete di negozi) in modo da minimizzare la distanza complessiva percorsa;
- *Problemi scientifici:*
  - *studi sulla struttura del DNA;*  
si tratta di problemi legati alla determinazione della sequenze di geni minimizzando la probabilità di errore;
  - *ricostruzione di immagini;*  
è il problema della visualizzazione delle informazioni provenienti, ad esempio, da un satellite oppure da una tomografia computerizzata, in modo da ottenere un’immagine della migliore qualità possibile;
- *Problemi di diagnostica medica.*
  - *interpretazione e analisi dei dati ottenibili da strumenti di analisi clinica.*
- *Problemi di controllo ottimo:*
  - *controllo di servomeccanismi e di sistemi di guida;*
  - *controllo di traiettorie.*

È importante evidenziare che i metodi della Ricerca Operativa sono oggi utilizzati anche in settori lontani dagli ambiti piú tradizionali come le *scienze sociali*, la *biologia*, le *scienze ambientali* e moltissimi altri.

Tuttavia, soprattutto in Italia, e soprattutto nelle realtà aziendali, gli strumenti utilizzati sono stati per anni assai rudimentali e spesso non adeguati alla crescente complessità dei sistemi di produzione. C'era spesso un notevole sforzo in termini sia finanziari sia umani per dotarsi di sistemi informativi all'avanguardia, ma raramente c'era un utilizzo di queste risorse per realizzare validi sistemi di supporto alle decisioni. Con il passare degli anni la consapevolezza dell'esigenza di tecniche quantitative per la gestione d'impresa è notevolmente cresciuta anche se non c'è ancora in certi settori una totale apertura verso l'utilizzo degli strumenti della Ricerca Operativa. Tuttavia, negli anni più recenti, l'enorme sviluppo dei mezzi di calcolo e degli strumenti metodologici hanno portato a un grande successo della Ricerca Operativa soprattutto negli Stati Uniti. Il merito di questo successo è da ricondurre alla consapevolezza ormai acquisita che l'incremento della potenza dei mezzi di calcolo non è certo sufficiente per risolvere tutti i problemi che si possono presentare. A confermare questo asserto si riassume di seguito un esempio dovuto a G. B. Dantzig<sup>1</sup> che è molto significativo: si supponga di essere a capo di un'azienda che ha 70 dipendenti e deve assegnare ciascuno di essi a 70 differenti mansioni; poiché le capacità lavorative di ogni singolo dipendente sono diverse, non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento. Naturalmente si deve fare in modo che ciascun dipendente sia assegnato ad una sola mansione e che ciascuna mansione sia svolta esattamente da un dipendente. Il problema consiste nel confrontare le 70! possibilità che ci sono per selezionare quella migliore nel senso che permetta di ottenere il maggiore utile per l'azienda. Le possibilità sono un numero molto grande, più grande di  $10^{100}$ . Ora si supponga di disporre di un calcolatore capace di effettuare un milione di calcoli al secondo e che sia in funzione dal tempo del Big Bang, 15 milioni di anni fa; avrebbe questo calcolatore oggi nell'anno 2000 esaminato tutte le 70! combinazioni possibili? La risposta è no. Supponiamo allora di disporre di un calcolatore che possa effettuare un miliardo di assegnamenti per ogni nano secondo; la risposta sarebbe ancora no. Supponiamo allora di riempire la superficie terrestre di calcolatori di questo tipo che lavorano in parallelo; la risposta sarebbe ancora no. Se si disponesse di  $10^{40}$  terre ciascuna ricoperta di calcolatori di questo tipo che sono in funzione dal tempo del Big Bang fino a quando il sole si raffredderà; allora, forse, la risposta potrebbe essere sì!

Da questo esempio facile da enunciare si deduce come in certe situazioni sia assolutamente impossibile esaminare tutti i casi possibili per determinare qual è il migliore. Per questo, prima dell'avvento della Ricerca Operativa, l'unica possibilità era affidarsi al buon senso di persone guidate dall'esperienza che stabilivano regole "ad hoc" di base che dovevano essere seguite per risolvere i problemi (*"ad hoc" ground-rule approach*).

---

<sup>1</sup>G. B. Dantzig, Linear Programming, *Operations Research*, vol.50, No.1, 2002, pag.42-47

A questo approccio la Ricerca Operativa contrappone un approccio assai diverso: si tratta del cosiddetto *approccio modellistico*. Esso organizza l'analisi di un problema reale in due fasi:

- la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* che ne astragga gli aspetti essenziali e che schematizzi le interrelazioni esistenti tra i diversi aspetti del fenomeno che si sta studiando;
- lo sviluppo di *metodi matematici efficienti* (algoritmi di soluzione) per determinare una soluzione ottima del problema o una sua buona approssimazione.

Naturalmente per costruire correttamente un modello matematico che rappresenti un particolare fenomeno, si devono distinguere i parametri di controllo significativi da quelli non essenziali, identificando un criterio per la valutazione della qualità della soluzione. Una volta determinato il modello corretto, la Ricerca Operativa si occupa di fornire una procedura esplicita per determinare una soluzione di un problema; tale procedura può essere rappresentata da metodi matematici analitici o, come più spesso accade, da metodi numerici che determinano la soluzione del problema mediante specifici algoritmi di calcolo.

In questo contesto, il merito maggiore della Ricerca Operativa consiste nello studiare un sistema nel suo complesso; infatti, la maggior parte dei problemi reali coinvolge diverse parti di un sistema mutuamente interagenti ed è quindi essenziale studiarne l'interazione reciproca. Questa è una caratteristica distintiva della Ricerca Operativa rispetto ad altre discipline ed è quindi evidente che un aspetto caratterizzante la Ricerca Operativa sia proprio l'interdisciplinarietà; ed infatti le tecniche di cui fa uso sono numerose e provengono da diverse branche della matematica: dall'algebra lineare alla logica, dalla statistica alla teoria dei giochi, dalla teoria delle decisioni alla teoria dei sistemi. Questo ha prodotto lo sviluppo di metodologie di soluzione che rappresentano un'inusuale combinazione di tecniche e strumenti tipici di altri settori.

#### 1.4 L'APPROCCIO MODELLISTICO

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione o, più in generale, l'impiego di metodi matematici per la soluzione di problemi applicativi, viene di solito realizzato attraverso diverse fasi. Tali fasi possono essere schematizzate nel seguente modo:

- ANALISI DEL PROBLEMA
- COSTRUZIONE DEL MODELLO
- ANALISI DEL MODELLO

- SOLUZIONE NUMERICA
- VALIDAZIONE DEL MODELLO

La prima fase consiste nell'*analisi della struttura del problema* per individuare i legami logico-funzionali e gli obiettivi.

Nella successiva fase di *costruzione del modello*, chiamata anche *formulazione*, si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema; questa fase di costruzione verrà descritta in dettaglio nel seguito.

Segue l'*analisi del modello* che prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà; le principali sono:

- *esistenza ed unicità* della soluzione ottima;
- *condizioni di ottimalità*, cioè una caratterizzazione analitica della soluzione ottima;
- *stabilità* delle soluzioni al variare dei dati o di eventuali parametri presenti.

La successiva fase di *soluzione* avviene mediante opportuni algoritmi di calcolo e la soluzione numerica così ottenuta deve poi essere interpretata dal punto di vista applicativo in modo da evitare che abbia scarso rilievo pratico; in questo caso le eventuali cause di inaccettabilità devono essere inglobate nel modello stesso costruendo così un nuovo modello più completo del precedente. Tale “validazione” del modello può avvenire attraverso una *verifica sperimentale* oppure con metodi di *simulazione*. La definizione di un modello si configura quindi come un processo di raffinamento iterativo, che può essere schematizzato come rappresentato in Figura 1.4.1.

## 1.5 MODELLI DELLA RICERCA OPERATIVA

Il primo passo dell'approccio modellistico consiste nel rappresentare un problema reale attraverso un *modello*; è utile, pertanto, chiarire subito cosa si intende con questo termine. Il termine *modello* è di solito usato per indicare una struttura appositamente costruita per mettere in evidenza le caratteristiche principali di alcuni oggetti reali. Alcune volte possono essere concreti (come ad esempio i modelli rappresentanti prototipi di aerei o auto), ma più spesso, come nella Ricerca Operativa, si tratta di *modelli astratti* cioè *modelli matematici* che usano il simbolismo dell'algebra per mettere in evidenza le relazioni principali dell'oggetto che deve essere modellato. I modelli di cui si tratterà in seguito sono quindi modelli matematici, e sono costituiti da un insieme di relazioni che descrivono in modo semplificato, ma sempre rigoroso, uno o più fenomeni del mondo reale. La nozione di modello matematico per rappresentare il mondo reale non è certo nuova: già Pitagora nel IV secolo a.C. tentava di costruire un modello matematico

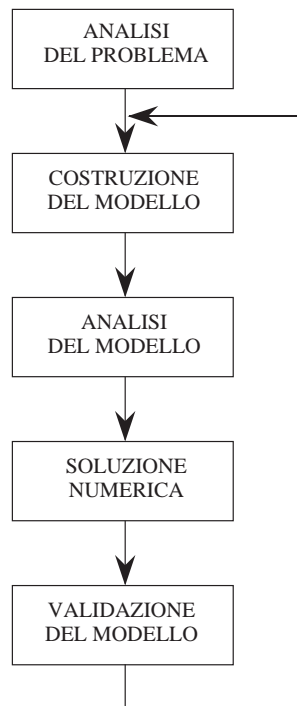


Figura 1.4.1 Fasi dell'approccio modellistico

dell'Universo anche se sotto una luce più esoterica che scientifica. L'interesse per la modellistica matematica è notevolmente cresciuto negli anni più recenti e ai giorni nostri è sempre più viva la convinzione che ricorrendo a modelli matematici sia possibile analizzare i molteplici aspetti del mondo reale e studiare l'influenza che l'uomo può esercitare su di essi. Ciò ha portato ad un enorme sviluppo delle applicazioni della modellistica matematica anche al di fuori delle tradizionali applicazioni alle scienze fisiche. Si è così avuta di fatto una vasta utilizzazione di modelli matematici in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come, ad esempio, le scienze sociali, la biologia, le scienze ambientali, la psicologia. Come esempi concreti, si pensi agli studi sulla dinamica della popolazione, sulla diffusione delle epidemie, sul risanamento ambientale. Questa notevole diffusione della modellistica matematica è anche dovuta al fatto che l'evoluzione di un modello matematico può essere rapidamente studiata grazie all'uso di moderni calcolatori elettronici.

È evidente come in molti casi le situazioni rappresentate da un modello sono molto complesse e alcune volte influenzate da fenomeni di natura aleatoria; per questa ragione, sono state definite diverse classi di modelli matematici: *modelli stocastici* che considerano grandezze che possono essere influenzate da fenomeni aleatori e *modelli deterministici* che considerano grandezze esatte; inoltre a seconda che le interazioni tra le grandezze sono immediate o distribuite nel tempo, si parla di

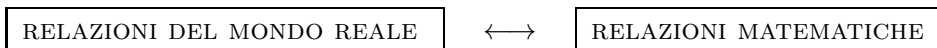
*modelli statici* e di *modelli dinamici*.

Nel seguito verranno analizzati i modelli deterministici che sono di fatto quelli più comunemente usati; in particolare si farà riferimento ai *modelli di programmazione matematica* nei quali è esplicitamente definito un obiettivo da minimizzare o massimizzare ed in cui le variabili sono vincolate ad appartenere ad un insieme prefissato. Si osservi che in questo contesto il termine “*programmazione*” è inteso nel senso di “*pianificazione*” e non di costruzione di programmi (codici) scritti in qualche linguaggio di programmazione.

### 1.5.1 Costruzione di un modello matematico

L’approccio modellistico per risolvere un problema di decisione necessita come primo passo della costruzione di un adeguato modello matematico. Infatti, come già discusso in precedenza, solo un modello costruito tenendo presente tutte le caratteristiche essenziali del fenomeno che si sta studiando permette di comprendere gli aspetti più importanti e di esercitare un intervento pratico efficace.

Nella fase di costruzione del modello matematico si deve fornire una descrizione formalizzata del problema di decisione facendo uso del linguaggio formale della matematica. Si dovrà cercare, quindi, una corrispondenza tra relazioni del mondo reale (relazioni tecnologiche, leggi fisiche, vincoli di mercato, etc.) e relazioni matematiche (equazioni, disequazioni, dipendenze logiche, etc.).



La costruzione di un modello richiede, quindi, scelte e valutazioni in modo da evidenziare gli aspetti più significativi del problema reale e che meglio sono suscettibili di una formalizzazione matematica. Tale procedimento di scelta spesso non è riconducibile ad un procedimento sistematico e quindi è necessario che chi costruisce il modello abbia da un lato una conoscenza approfondita del settore applicativo per evitare che le risposte ottenute dal modello abbiano scarsa rilevanza pratica; dall’altro deve avere una notevole conoscenza dei metodi matematici disponibili per la ricerca della soluzione per evitare che la formulazione matematica porti ad un problema per il quale non esistono algoritmi risolutivi utilizzabili.

È importante ribadire che un modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono ed è quindi necessario che tali relazioni siano il più possibile indipendenti dai dati introdotti nel modello; questo perché uno stesso modello deve poter essere usato in differenti occasioni con dati (cioè costi, disponibilità di risorse, limiti tecnologici, etc.) diversi. Lo studio di questo aspetto, come già detto, rientra nella fase di analisi del modello sotto il nome di analisi della stabilità del modello rispetto ai dati introdotti.

### 1.5.2 Vantaggi dell'approccio modellistico

Le motivazioni che rendono molto utile la costruzione di un modello matematico sono molteplici; si riassumono di seguito le principali.

- *Possibilità di risolvere matematicamente il problema.*

Grazie al modello è possibile analizzare matematicamente il problema ed ottenere così una soluzione che, soprattutto in riferimento a scopi di pianificazione, permette di adottare strategie che da una sola analisi strutturale del problema non apparirebbero evidenti o che a volte potrebbero essere perfino controintuitive.

- *Maggiore comprensione del problema.*

Il modello è una rappresentazione semplificata del problema e spesso la sua costruzione consente di individuare proprietà strutturali del problema che altrimenti non sarebbero affatto evidenti.

- *Deduzione analitica di importanti proprietà.*

Nella fase di analisi del modello è possibile dedurre per via analitica alcune importanti proprietà del problema sulla base dei risultati disponibili per la classe di problemi a cui si fa riferimento.

- *Possibilità di simulazioni.*

Con un modello è possibile effettuare esperimenti che spesso non è possibile effettuare direttamente nella realtà; ad esempio, l'uso di un modello consente di studiare gli effetti dell'adozione di una particolare misura economica in un paese senza la necessità di sperimentarla direttamente.

### 1.5.3 Critiche all'approccio modellistico

Le principali critiche all'approccio modellistico e, quindi, alla costruzione di modelli per la soluzione di problemi di decisione possono essere sintetizzate nei seguenti due punti:

- Impossibilità di quantificare soddisfacentemente con opportuni valori numerici alcuni dati richiesti dal modello; questo accade, ad esempio, nel tentativo di quantificare con un costo o con un profitto alcuni valori sociali soprattutto in relazione a scopi di pianificazione.
- La qualità delle risposte che un modello produce potrebbero dipendere profondamente dall'accuratezza dei dati introdotti.

Il primo punto riguarda la possibilità di dover trattare concetti non facilmente quantificabili, ma ogni approccio scientifico può difficilmente evitare tale difficoltà; il modo migliore per superare tale problema consiste nell'incorporare tale quantificazione nel modello stesso.

La seconda critica riguarda la possibile mancanza di precisione di alcuni dei dati immessi nel modello; tale critica è meno rilevante della precedente, in quanto anche se alcuni dati introdotti sono poco accurati, è ancora possibile che la struttura del modello sia tale da garantire che la soluzione sia sufficientemente accurata.

All'estremo opposto di queste critiche si può collocare un atteggiamento di totale fiducia del modello che induca ad accettare la prima risposta prodotta dal modello senza ulteriori analisi. Tale atteggiamento, in realtà molto raro, è assai pericoloso in quanto tale risposta potrebbe rappresentare un piano operativo non accettabile nella realtà; in tal caso i motivi della non accettabilità devono essere evidenziati e incorporati in un nuovo modello modificato: si tratta, in realtà, della già citata fase di validazione del modello che quindi non può essere trascurata e che costituisce un valido mezzo per costruire modelli sempre più completi e significativi.

In conclusione, come spesso accade, l'atteggiamento corretto si colloca tra le due situazioni estreme precedentemente citate e consiste nel considerare la costruzione del modello un mezzo assai utile per affrontare un problema di decisione: rimane il fatto che la qualità delle risposte che un modello produce dipende dall'accuratezza della sua struttura e quindi non è trascurabile la fase di validazione che consente di interpretare la soluzione numerica ottenuta ed eventualmente permettere di completare il modello introducendo elementi trascurati in una prima fase, in assenza dei quali la soluzione risulta non accettabile oppure di scarso rilievo dal punto di vista applicativo.



# 2

---

## La Programmazione Matematica

All'interno della Ricerca Operativa, un ruolo di fondamentale importanza è svolto dalla *Programmazione Matematica* che è la disciplina che ha per oggetto lo studio dei problemi in cui si vuole minimizzare o massimizzare una funzione reale definita su  $\mathbb{R}^n$  (lo spazio delle  $n$ -uple reali) le cui variabili sono vincolate ad appartenere ad un insieme prefissato che è descritto attraverso un numero finito di disuguaglianze o uguaglianze. Si tratta quindi di *problemi di Ottimizzazione* cioè problemi nei quali si desidera minimizzare o massimizzare una funzione.

### 2.1 PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

In termini generali, data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ed  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , un *problema di Ottimizzazione* può essere formulato nella forma

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S. \end{cases} \quad (PO)$$

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione  $f$  tra i punti dell'insieme  $S$ .

Si parlerà indifferentemente di problemi di massimo o di minimo in quanto vale  $\min_{x \in S} f(x) = -\max_{x \in S} (-f(x))$ .

La funzione  $f$  viene chiamata *funzione obiettivo* e l'insieme  $S$  *insieme ammissibile* cioè l'insieme delle possibili soluzioni del problema. Un punto  $x \in S$  si chiama *soluzione ammissibile*.

L'insieme ammissibile  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e quindi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  è una variabile vettoriale  $n$ -dimensionale e la funzione obiettivo  $f$  è una funzione di  $n$  variabili reali  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### 2.1.1 Definizioni fondamentali

Si riportano di seguito alcune definizioni fondamentali riguardanti i problemi di Ottimizzazione.

**Definizione 2.1.1** *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice inammissibile se  $S = \emptyset$ , cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

**Definizione 2.1.2** *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice illimitato (inferiormente) se comunque scelto un valore  $M > 0$  esiste un punto  $x \in S$  tale che  $f(x) < -M$*

**Definizione 2.1.3** *Si dice che il problema di ottimizzazione (PO) ammette soluzione ottima (finita) se esiste un  $x^* \in S$  tale che risulti  $f(x^*) \leq f(x)$  per ogni  $x \in S$ . Il punto  $x^*$  è detto soluzione ottima o minimo globale e il corrispondente valore  $f(x^*)$  si dice valore ottimo.*

Queste definizioni sono immediatamente estendibili al caso in cui un problema di Ottimizzazione è scritto in forma di massimizzazione.

### 2.1.2 Classificazione dei problemi di Ottimizzazione

All'interno dei problemi di Ottimizzazione, in base alla *struttura dell'insieme ammissibile*  $S$ , si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CONTINUA.

Le variabili possono assumere tutti i valori reali ( $x \in \mathbb{R}^n$ ); ed inoltre si parla di problemi di ottimizzazione continua

- *vincolata* se  $S \subset \mathbb{R}^n$
- *non vincolata* se  $S = \mathbb{R}^n$ .

- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE DISCRETA.

Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ( $x \in \mathbf{Z}^n$ ); si possono distinguere all'interno di questa classe di problemi altre due classi:

- *programmazione a numeri interi* se  $S \subseteq \mathbf{Z}^n$
- *ottimizzazione booleana* se  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ .

- PROBLEMI MISTI.

Solo alcune delle variabili sono vincolate ad essere intere.

## 2.2 PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

Di solito l'insieme ammissibile  $S$  viene descritto da una numero finito di disuguaglianze del tipo  $g(x) \geq b$ , dove  $g$  è una funzione definita su  $\mathbb{R}^n$  a valori reali e  $b \in \mathbb{R}$ . Cioè, formalmente, date  $m$  funzioni  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ed  $m$  scalari  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  si esprime  $S$  nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq b_1, \quad g_2(x) \geq b_2, \quad \dots \quad , \quad g_m(x) \geq b_m\}.$$

Ogni disuguaglianza  $g_i(x) \geq b_i$  prende nome di *vincolo* e l'insieme ammissibile è quindi formato da tutti quei punti  $x \in \mathbb{R}^n$  che sono soluzione del sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} g_1(x) & \geq & b_1 \\ g_2(x) & \geq & b_2 \\ g_3(x) & \geq & b_3 \\ & \vdots & \\ g_m(x) & \geq & b_m \end{cases}$$

**Osservazione 2.2.1** In questa formulazione dell'insieme  $S$  si sono utilizzati vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di minore o uguale e vincoli di uguaglianza; infatti si può sempre trasformare un vincolo di minore o uguale del tipo  $g(x) \leq b$  in un vincolo di maggiore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma  $-g(x) \geq -b$ . Inoltre un vincolo di uguaglianza  $g(x) = b$  può essere riscritto nella forma equivalente delle due disuguaglianze  $g(x) \geq b$  e  $-g(x) \geq -b$ .

Quindi, senza perdere di generalità, si può riscrivere il problema di ottimizzazione (PO) nella forma

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Un problema di questo tipo viene chiamato *problema di Programmazione Matematica*. I punti dell'insieme ammissibile di questo tipo di problemi sono quelli per i quali tutti i vincoli sono soddisfatti cioè tutti quei punti  $x$  tali che tutte le disuguaglianze  $g_i(x) \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono verificate.

I problemi di Programmazione Matematica si possono classificare in base alla *struttura delle funzioni che li definiscono*; in particolare si ha la seguente classificazione:

- **PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)**  
La funzione obiettivo  $f(x)$  e tutte le funzioni che definiscono i vincoli  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono *lineari*, cioè esprimibili nella forma  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ .
- **PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE NON LINEARE (PNL)**  
Almeno una delle funzioni che definiscono un problema di Programmazione Matematica *non è lineare*.

Si formalizzano nella definizione che segue alcuni semplici concetti riguardanti i vincoli di un problema di Programmazione Matematica.

**Definizione 2.2.2** *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo  $g(x) \geq b$ , esso si dice:*

- soddisfatto in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) \geq b$ ;
- violato in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) < b$ ;
- attivo in un punto  $\bar{x}$  se  $g(\bar{x}) = b$ ;
- ridondante se con la sua eliminazione l'insieme ammissibile rimane immutato.

Alcuni esempi di problemi di Programmazione Matematica sono i seguenti:

**Esempio 2.2.3** *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  che si vuole minimizzare, con i vincoli  $2x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Si ottiene il problema*

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

*che è nella forma (2.2.1) dove  $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2, g_2(x_1, x_2) = x_1, g_3(x_1, x_2) = x_2, b_1 = 1, b_2 = b_3 = 0$ . L'insieme ammissibile è descritto attraverso questi tre vincoli e poiché tutte le funzioni che compaiono sono lineari nelle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , questo problema è un problema di Programmazione Lineare.*

**Esempio 2.2.4** *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$  che si vuole massimizzare, con i vincoli  $x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \leq 1,$*

$x_2 \leq 1$ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \max(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare (quadratico).

**Esempio 2.2.5** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2$  che si vuole minimizzare, con vincoli  $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 1$ . Si ottiene il problema

$$\begin{cases} \min 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare che può essere facilmente ricondotto nella forma (2.2.1) riscrivendo il secondo vincolo nella forma  $-x_1 - x_2 \geq -\frac{1}{2}$ .

**Esempio 2.2.6** Si consideri una funzione obiettivo di due variabili  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  che si vuole minimizzare sulla regione ammissibile descritta dal vincolo di uguaglianza  $4x_1 - x_2 = -2$ . Il problema di Programmazione Lineare risultante è

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

che è un problema di Programmazione Lineare con un solo vincolo di uguaglianza.

Gli esempi appena visti, per semplicità, sono stati formulati come problemi in due variabili, in modo da permettere, fra l'altro, di comprenderne facilmente la loro struttura geometrica. Il significato geometrico di problemi di Programmazione Matematica verrà comunque trattato in dettaglio in seguito.

### 2.3 MODELLI DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

I modelli standard più comunemente usati nella Ricerca Operativa sono i *modelli di Programmazione Matematica*, cioè modelli che possono essere rappresentati per mezzo di un problema di Programmazione Matematica. I settori applicativi all'interno dei quali sorgono problemi di questo tipo sono moltissimi: come esempi si possono citare problemi inerenti la pianificazione industriale, problemi di progettazione ottima, problemi di gestione di reti, problemi di economia e moltissimi altri.

Tuttavia, ogni lista di classi di modelli non può essere esaustiva: possono sempre presentarsi situazioni pratiche che non possono essere modellate in modo standard oppure che possono essere modellate in più di un modo standard.

La costruzione formale di un modello di Programmazione Matematica si effettua a partire da una descrizione logica e qualitativa di un problema di decisione e richiede di :

1. associare opportune *variabili di decisione* alle grandezze reali. Tali variabili costituiscono le incognite del problema;
2. esprimere formalmente l'*obiettivo* che si intende minimizzare o massimizzare;
3. esprimere quantitativamente i *legami* esistenti tra le variabili e le *limitazioni* derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, etc. Tali legami e limitazioni definiscono i *vincoli*. L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile*.

A seconda della classe di problemi di Ottimizzazione entro la quale la formulazione del modello si colloca si parlerà di *modelli continui*, *modelli discreti*, *modelli misti*.

### 2.3.1 Esempi di modelli di Programmazione Matematica

Come primi esempi di costruzione di modelli verranno ora analizzati un semplice problema di pianificazione della produzione, un problema di pianificazione degli investimenti e un problema di progettazione industriale.

**Esempio 2.3.1** *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti, Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3, Tipo 4, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

|                                | <b>Tipo 1</b> | <b>Tipo 2</b> | <b>Tipo 3</b> | <b>Tipo 4</b> |
|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>Reparto produzione</b>      | 2             | 1.5           | 0.5           | 2.5           |
| <b>Reparto confezionamento</b> | 0.5           | 0.25          | 0.25          | 1             |

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

|                | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 3 | Tipo 4 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| profitti netti | 250    | 230    | 110    | 350    |

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

**Analisi del problema e costruzione del modello.**

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione industriale in cui le incognite, che saranno le variabili del problema, sono le quantità di fertilizzante di ciascun tipo che si devono produrre. Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale.

- *Variabili di decisione.* È naturale introdurre le variabili reali  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto del **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4** da fabbricare in una settimana.
- *Funzione Obiettivo.* Ciascuna tonnellata di fertilizzante contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4. \tag{2.3.1}$$

L’obiettivo dell’industria sarà quello di scegliere le variabili  $x_1, x_2, x_3, x_4$  in modo che l’espressione (2.3.1) del profitto sia massimizzata. La (2.3.1) rappresenta la funzione obiettivo.

- *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica limita i valori che possono assumere le variabili  $x_j, j = 1, \dots, 4$ ; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di fertilizzanti si dovrà avere

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \tag{2.3.2}$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50. \tag{2.3.3}$$

Le espressioni (2.3.2), (2.3.3) costituiscono i vincoli del modello. Si devono inoltre esplicitare vincoli dovuti al fatto che le variabili  $x_j, j = 1, \dots, 4$  rappresentano

quantità di prodotto non possono essere negative e quindi vanno aggiunti i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Posto  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ , l'insieme ammissibile  $S$  sarà quindi così definito:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100, \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma

$$\begin{cases} \max (250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

□

**Esempio 2.3.2** – CAPITAL BUDGETING. *Supponiamo di dover investire £1000 sul mercato finanziario. Supponiamo inoltre che il mercato offra tre tipi diversi di investimenti **A, B, C** ciascuno caratterizzato da un prezzo d'acquisto e da un rendimento netto, che sono riassunti nella seguente tabella:*

|                   | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> |
|-------------------|----------|----------|----------|
| <b>costo</b>      | 750      | 200      | 800      |
| <b>rendimento</b> | 20       | 5        | 10       |

*Si vuole decidere quali degli investimenti effettuare per massimizzare il rendimento sapendo che gli investimenti **A, B, C** non si possono effettuare in modo parziale cioè non sono frazionabili.*

### Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione degli investimenti. Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* Si tratta quindi di esprimere matematicamente la scelta elementare: effettuare o non effettuare l'investimento. Una scelta naturale delle variabili di decisione è la seguente:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{non si effettua l'investimento } i\text{-esimo} \\ 1 & \text{si effettua l'investimento } i\text{-esimo} \end{cases} \quad i = \mathbf{A, B, C} \quad (2.3.4)$$

– *Insieme ammissibile.* In base alla definizione delle variabili, le possibili scelte compatibili con il nostro budget sono:



- (0) non si effettuano investimenti  $x_A = x_B = x_C = 0$
- (1) si effettua l'investimento **A**;  $x_A = 1, x_B = x_C = 0$
- (2) si effettua l'investimento **B**;  $x_A = 0, x_B = 1, x_C = 0$
- (3) si effettua l'investimento **C**;  $x_A = x_B = 0, x_C = 1$
- (4) si effettuano gli investimenti **A** e **B**;  $x_A = x_B = 1, x_C = 0$
- (5) si effettuano gli investimenti **B** e **C**;  $x_A = 0, x_B = x_C = 1$ .

Notiamo che le possibilità **A**, **C** e **A**, **B**, **C** non sono ammissibili in quanto il costo supera la nostra disponibilità. L'insieme ammissibile, ovvero l'insieme delle possibili scelte (0) – (5) è dato da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme dei vettori di  $\mathbb{R}^3$  a componenti 0–1 ovvero  $S \subseteq \{0, 1\}^3$ .

– *Funzione obiettivo.* L'obiettivo che ci proponiamo è la massimizzazione del rendimento totale. Quindi dobbiamo esprimere la funzione obiettivo che corrisponde al rendimento netto relativo alla scelta di  $x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$  in  $S$ , cioè

$$f(x) = 20x_A + 5x_B + 10x_C.$$

È possibile ottenere la soluzione ottima valutando esaustivamente la funzione obiettivo per ogni elemento di  $S$ , ottenendo in relazione alle possibili scelte:

- (0)  $f_0 = 0$
- (1)  $f_1 = 20$
- (2)  $f_2 = 5$
- (3)  $f_3 = 10$
- (4)  $f_4 = 25$
- (5)  $f_5 = 15$ .

La soluzione ottima è ovviamente quella corrispondente alla scelta (4), cioè all'effettuare gli investimenti **A** e **B**, con valore della funzione obiettivo pari a £25.

Questo *non è un modello corretto* per due motivi:

1. *L'insieme ammissibile  $S$  è rappresentato in modo estensivo*, cioè elencando tutte le soluzioni ammissibili. In questo caso la cardinalità dell'insieme ammissibile è al più quella di  $\{0, 1\}^3$  cioè  $2^3$ , ma in generale, se la dimensione

del problema fosse piú grande sarebbe impossibile valutare esaustivamente le soluzioni del problema. Se, ad esempio, il numero degli investimenti fosse stato 100 (che dal punto di vista delle applicazioni reali è del tutto verosimile) la cardinalità dell'insieme ammissibile sarebbe stata  $2^{100}$  e per la valutazione di  $2^{100}$  possibilità anche supponendo di utilizzare un calcolatore che effettui  $10^{10}$  valutazioni al secondo (velocità superiore a quella raggiungibile dai calcolatori attuali) occorrerebbero  $10^{20}$  secondi, cioè 3000 miliardi di anni !

2. *Il modello non è indipendente dai dati del problema*, cioè cambiando i dati del problema (prezzi e/o rendimenti) sarebbe necessario cambiare completamente il modello.

In generale, in un modello corretto, si cerca di dare una *rappresentazione intensiva* dell'insieme ammissibile  $S$ , cioè individuare le proprietà  $P(x)$  che consentono di distinguere le soluzioni ammissibili dagli elementi dell'insieme  $\{0, 1\}^3$  che non lo sono. Si vuole quindi scrivere l'insieme  $S$  in una forma del tipo:

$$S = \{x \in \{0, 1\}^3 : \text{vale la proprietà } P(x)\}.$$

Nell'esempio, la proprietà distintiva degli elementi di  $S$  è il costo complessivo che non deve essere superiore a £1000. Possiamo esprimere matematicamente questa relazione come:

$$P(x) : 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

e quindi l'insieme ammissibile si può scrivere

$$S = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^3 \mid 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \right\}.$$

In conclusione, il modello matematico corretto per il problema di decisione in esame è:

$$\begin{cases} \max(20x_A + 5x_B + 10x_C) \\ 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}. \end{cases}$$

□

**Esempio 2.3.3** *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica per contenere grandi quantitativi di un liquido che verrà poi distribuito in piccole confezioni pronte per la vendita al minuto. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi. Tale magazzino è a pianta rettangolare di dimensioni metri  $20 \times 10$  ed ha un tetto spiovente lungo il lato di 10 metri, che ha altezza massima di metri 5 e altezza minima di metri 3. Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di  $200 \text{ m}^2$  di tale*

*materiale plastico si costruisca un modello che permetta di determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*

**Analisi del problema e costruzione del modello.**

Si tratta di determinare il dimensionamento ottimale di un contenitore cilindrico per uso industriale cercando di massimizzare il suo volume tenendo presente che deve essere contenuto in un magazzino di dimensioni fissate. Si devono innanzitutto definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* È immediato introdurre due variabili  $x_1$  e  $x_2$  che rappresentano rispettivamente la lunghezza (in metri) del raggio di base e dell'altezza del contenitore cilindrico.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è rappresentata dal volume del contenitore cilindrico ed è data da

$$\pi x_1^2 x_2.$$

– *Vincoli.* Il diametro della base non può superare le dimensioni del magazzino e quindi deve essere

$$2x_1 \leq 10.$$

La limitazione dell'altezza del contenitore varia al variare del diametro di base in quanto il tetto è spiovente. Dato che la pendenza del tetto è del 20%, dovrà risultare

$$x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1.$$

Inoltre disponendo solo di una quantità limitata di materiale plastico la superficie totale del contenitore cilindrico non può superare  $200m^2$  e quindi deve risultare

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200.$$

Si devono infine esplicitare i vincoli di non negatività  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Quindi l'insieme ammissibile è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_1 \leq 5, \quad x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1, \quad 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La formulazione complessiva risulta quindi

$$\begin{cases} \max & \pi x_1^2 x_2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 5 - 0.2 \cdot 2x_1 \\ & 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \leq 200 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

□

**Osservazione 2.3.4** Negli Esempi 2.3.1 e 2.3.2 ora analizzati, sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *lineari* nelle variabili di decisione. Quindi questi modelli hanno una forma particolare che, in generale prende nome di *Modello di Programmazione Lineare*, (PL). Questa classe di modelli è molto importante e sarà la classe di problemi che tratteremo nel seguito.

**Osservazione 2.3.5** Nell'Esempio 2.3.1 abbiamo assunto che le variabili di decisione potessero assumere valori reali e quindi, in particolare, frazionari. Tale assunzione potrebbe essere vera nel caso in cui per quantità di prodotto si intenda una misura, ad esempio in litri, quintali, o altra quantità frazionabile di prodotto. Altrimenti se tale quantità rappresenta, ad esempio il numero di motori per automobile, allora le variabili  $x_j$  che danno la misura di questa quantità devono assumere *valori interi*. In tal caso, sempre nell'ipotesi che il modello sia lineare, si parla di *Modello di Programmazione Lineare Intera* (PLI). Questo è anche il caso del modello dell'Esempio 2.3.2.

**Osservazione 2.3.6** A differenza degli Esempi 2.3.1 e 2.3.2, nell'Esempio 2.3.3 sia la funzione obiettivo, sia uno dei vincoli sono rappresentati attraverso espressioni *non lineari* nelle variabili di decisione. In questo caso si parla di *Modello di Programmazione Non Lineare* (PNL). La presenza di espressioni non lineari in un modello di programmazione matematica è piuttosto frequente: si pensi, ad esempio, ad una generica situazione in cui il profitto unitario che si ricava dalla vendita di un prodotto varia al variare della quantità dei prodotti venduti fino a quel momento; nella realtà, in accordo ad elementari leggi di mercato, accade molto spesso che il prezzo unitario di un prodotto possa aumentare se cresce la richiesta e quindi se una variabile  $x$  rappresenta la quantità di prodotto venduto e  $p(x)$  il prezzo di vendita (dipendente da  $x$ ), il profitto che si ricava dalla vendita di  $x$  prodotti sarà  $p(x)x$ ; il termine  $p(x)$  introduce una non linearità nella funzione obiettivo. Come esempio di ciò, riferendoci all'Esempio 2.3.1, se avessimo supposto che il prezzo unitario di vendita del prodotto **P1** fosse  $250 + 3x_1$  cioè fosse dipendente dalla quantità di prodotto venduto  $x_1$  il contributo al profitto complessivo dato dalla vendita di  $x_1$  prodotti **P1** sarebbe stato  $(250 + 3x_1)x_1$ . Verrebbe così introdotta una non linearità data dal termine  $3x_1^2$ . Anche in questo caso in cui la sola funzione obiettivo è non lineare ed i vincoli continuano ad essere lineari, si parla di modelli di Programmazione Non Lineare. Tuttavia i modelli non lineari sono di solito molto più difficili da risolvere e quindi molto spesso si cerca di approssimarli con modelli lineari.