

# 4

---

## *Introduzione alla Programmazione Lineare*

In questo capitolo esaminiamo in modo dettagliato la struttura di un problema di Programmazione Lineare fornendo, in particolare, la rappresentazione geometrica di un problema di Programmazione Lineare in due variabili e quindi rappresentabile sul piano cartesiano. Grazie ad essa, dedurremo, per via geometrica, alcune importanti caratteristiche sia dell'insieme ammissibile, sia della soluzione ottima che suggeriranno anche i primi rudimenti per un metodo di soluzione. Queste caratteristiche saranno poi oggetto di una rigorosa formalizzazione nel caso di un generale problema di Programmazione Lineare in  $n$  variabili nei capitoli che seguono.

### **4.1 INTRODUZIONE**

La Programmazione Lineare è indubbiamente l'argomento centrale dell'Ottimizzazione e fra i vari modelli della Ricerca Operativa, la Programmazione Lineare è quello che viene più ampiamente utilizzato. Infatti, la PL non solo si applica a numerosi problemi reali che hanno di per sé una struttura lineare, ma è anche un importante strumento di supporto nell'analisi e nella risoluzione di problemi di programmazione matematica più complessi.

Il padre della PL viene comunemente, e giustamente, indicato in George Dantzig che per primo ne ideò, nel 1947, un algoritmo risolutivo (il metodo del Simplex, che verrà esaminato nel seguito). Tuttavia, alcuni dei concetti fondamentali della programmazione lineare possono essere fatti risalire molto più indietro nel tempo. Già Fourier, nel 1827, aveva studiato come trovare soluzioni ammissibili di un sistema di disuguaglianze lineari; un metodo di calcolo destinato a minimizzare

gli errori d'osservazione e dovuto a Vallée Poussin (1910) presenta lati simili al metodo del simplesso; infine lavori di von Neumann degli anni venti e trenta, sulla teoria dei giochi e su alcuni modelli economici, sono antecedenti diretti del lavoro di Dantzig. Nel 1939, poi, il matematico sovietico Kantorovich aveva pubblicato (in russo) una monografia sulla programmazione della produzione che anticipa, sotto molti aspetti importanti, i temi trattati da Dantzig. Purtroppo questo lavoro fu a lungo ignorato in Occidente essendo riscoperto solo venti anni dopo, quando la PL aveva avuto un grande sviluppo.

Ancora prima della pubblicazione dello studio di Kantorovich, Leontief (1932) aveva presentato il suo lavoro fondamentale, in cui si proponeva una struttura matriciale (*Interindustry Input-Output model*) per lo studio dell'economia americana. Per questo modello Leontief vinse il Premio Nobel per l'Economia nel 1976.

La caratteristica di tutti i lavori antecedenti quelli di Dantzig era uno scarso interesse verso l'applicabilità pratica, dovuta principalmente all'impossibilità di effettuare i calcoli necessari. Il metodo del Simpleso proposto da Dantzig si rivelò invece efficiente in pratica e questo, unitamente al simultaneo avvento dei calcolatori elettronici, decretò il successo della Programmazione Lineare e, con esso, l'inizio dello sviluppo rigoglioso della Ricerca Operativa.

## 4.2 STRUTTURA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Come abbiamo già visto nel paragrafo 3.1 un problema di Programmazione Lineare è caratterizzato da una funzione obiettivo lineare (da minimizzare o massimizzare) della forma

$$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

e da un numero finito  $m$  di vincoli lineari della forma

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & \geq b_m. \end{array} \quad (4.2.1)$$

Ricordiamo inoltre che, introducendo il vettore  $c \in \mathbb{R}^n$ , definito  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  definito  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , il vettore  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$  e la matrice  $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Si osservi che, indicando con  $a_i^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ , le righe della matrice  $A$ , ciascun vincolo del problema, ovvero ciascuna disuguaglianza della (4.2.1) può essere scritto nella forma  $a_i^T x \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### 4.3 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

In questo paragrafo si vuole fornire una interpretazione geometrica di un problema di Programmazione Lineare. In particolare, quando un problema di Programmazione Lineare contiene solamente due variabili, si può rappresentare efficacemente il problema sul piano cartesiano e si può determinare una sua soluzione in maniera elementare con semplici deduzioni geometriche. Le situazioni che verranno presentate nel seguito vogliono rappresentare un punto di partenza intuitivo per la trattazione di problemi di Programmazione Lineare in  $n$  variabili; i risultati che verranno dedotti per via elementare nel caso bidimensionale trovano, infatti, una generalizzazione consistente nel caso di un generico problema di Programmazione Lineare.

A questo scopo verranno considerati due esempi di problemi di Programmazione Lineare già ottenuti come formulazione di un semplice problema di allocazione ottima di risorse (Esempio 3.4.1) e di un semplice problema di miscelazione (Esempio 3.4.12).

#### 4.3.1 Rappresentazione di vincoli lineari

Preliminarmente, si richiama il fatto che sul piano cartesiano  $Ox_1x_2$  l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c \tag{4.3.1}$$

rappresenta una retta che partiziona il piano in due semipiani. Ciascun semipiano è caratterizzato da punti  $P(x_1, x_2)$  che soddisfano la disequazione  $ax_1 + bx_2 \geq c$  oppure la disequazione  $ax_1 + bx_2 \leq c$ . Quindi ogni disequazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 \geq c \quad \text{oppure} \quad ax_1 + bx_2 \leq c$$

individua univocamente un semipiano. Si riporta, ora, un semplice risultato geometrico che verrà utilizzato nel seguito.

**Lemma 4.3.1** *Si considera una famiglia di rette parallele*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c \quad (4.3.2)$$

con  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  fissati e con  $c \in \mathbb{R}$ . Il vettore  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia (4.3.2) ed è orientato dalla parte in cui sono le rette della famiglia ottenute per valori crescenti della  $c$ , cioè verso il semipiano in cui risulta  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$ .

*Dimostrazione:* Sia  $x$  un vettore di componenti  $x_1$  e  $x_2$ . La famiglia di rette (4.3.2) può essere scritta in forma vettoriale

$$a^T x = c.$$

Siano ora  $\bar{x}$  e  $\bar{z}$  due punti appartenenti alla retta  $a^T x = c$ . Risulta quindi

$$a^T \bar{z} = c \quad \text{e} \quad a^T \bar{x} = c$$

e sottraendo membro a membro queste due uguaglianze si ottiene

$$a^T (\bar{z} - \bar{x}) = 0.$$

Quindi il vettore  $a$  è ortogonale al vettore  $\bar{z} - \bar{x}$  che individua la direzione della famiglia di rette cioè il vettore  $a$  rappresenta una direzione ortogonale alla famiglia di rette (4.3.2).

Si consideri ora un punto  $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$  appartenente alla retta  $a^T x = c$  e un punto  $\bar{y} = (y_1, y_2)^T$  tale che  $a^T \bar{y} \geq c$ . Si vuole dimostrare che il punto  $\bar{y}$  appartiene al semipiano individuato dalla retta  $a^T x = c$  verso il quale è orientato il vettore  $a$ . Infatti, per le ipotesi fatte, si ha

$$a^T \bar{y} \geq c \quad \text{e} \quad a^T \bar{x} = c$$

e sottraendo membro a membro queste due relazioni si ottiene

$$a^T (\bar{y} - \bar{x}) \geq 0$$

e questo significa che l'angolo  $\theta$  che il vettore  $\bar{y} - \bar{x}$  forma con il vettore  $a$  deve essere acuto e quindi il vettore  $a$  deve essere orientato verso il semipiano ove si trova il punto  $\bar{y}$ , cioè il semipiano individuato dalla disuguaglianza  $a^T x \geq c$ . (Figura 4.3.1)  $\square$

Come esempio del risultato riportato dal lemma appena dimostrato, si consideri la disuguaglianza lineare  $3x_1 + x_2 \geq 6$ . Il vettore  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  individua una direzione

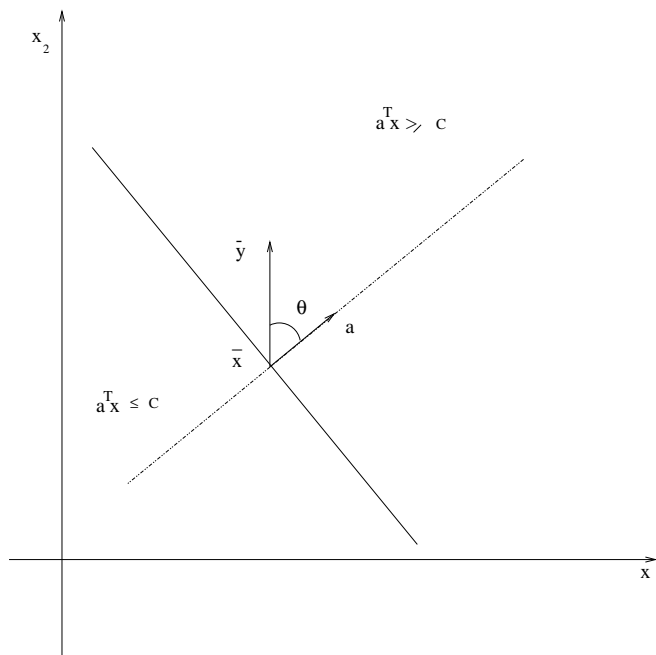


Figura 4.3.1 Interpretazione geometrica del Lemma 4.3.1

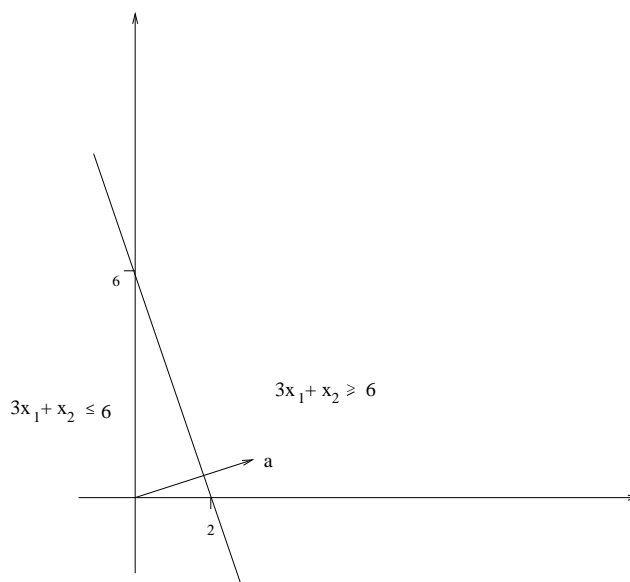


Figura 4.3.2 Rappresentazione del vincolo lineare  $3x_1 + x_2 \geq 6$

ortogonale alla retta  $3x_1 + x_2 = 6$  ed è orientato verso il semipiano individuato dalla disuguaglianza  $3x_1 + x_2 \geq 6$  (Figura 4.3.2).

Nella pratica, per determinare quale dei due semipiani è individuato dalla disuguaglianza lineare  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$  si può procedere semplicemente in questo modo: dopo aver rappresentato la retta  $a_1x_1 + a_2x_2 = c$  per individuare qual è il semipiano di interesse, si può scegliere un punto  $P$  del piano (l'origine degli assi è il più semplice) e valutare l'espressione  $a_1x_1 + a_2x_2$  in questo punto; se il valore così ottenuto è maggiore o uguale di  $c$  allora il semipiano individuato dalla disuguaglianza lineare  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq c$  è quello contenente il punto  $P$ ; in caso contrario è quello opposto.

### 4.3.2 Rappresentazione di funzioni obiettivo lineari

Quanto esposto nel paragrafo precedente è utile anche per esaminare la variazione di una funzione lineare che rappresenta la funzione obiettivo di un problema di Programmazione Lineare. In due variabili, la funzione obiettivo di un problema di Programmazione Lineare è un'espressione del tipo  $c_1x_1 + c_2x_2$  da massimizzare o da minimizzare. Per rappresentare questa funzione obiettivo su un piano cartesiano  $Ox_1x_2$  si considera la famiglia di rette parallele

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C \quad (4.3.3)$$

ottenuta al variare di  $C$ , che rappresentano le *curve di livello* della funzione  $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$  che ovviamente in questo caso sono rette. Se il problema è di minimizzazione, si cercherà di ottenere un valore più basso possibile per la  $C$  in corrispondenza di valori ammissibili per  $x_1$  e  $x_2$ ; viceversa, se il problema è di massimizzazione, si cercherà ottenere un valore più alto possibile per la  $C$ . Sulla base di quanto esposto nel paragrafo precedente, valori superiori della  $C$  si determinano trasladando le rette nel verso individuato dal vettore  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  che rappresenta, quindi, una *direzione di crescita* per la funzione  $c_1x_1 + c_2x_2$ . Ovviamente, la direzione opposta sarà una *direzione di decrescita*.

Quindi, geometricamente, un problema di massimizzazione consisterà nel considerare la traslazione nel verso della direzione di crescita della funzione obiettivo, mentre in un problema di minimizzazione si considera la traslazione nel verso opposto (Figura 4.3.3)

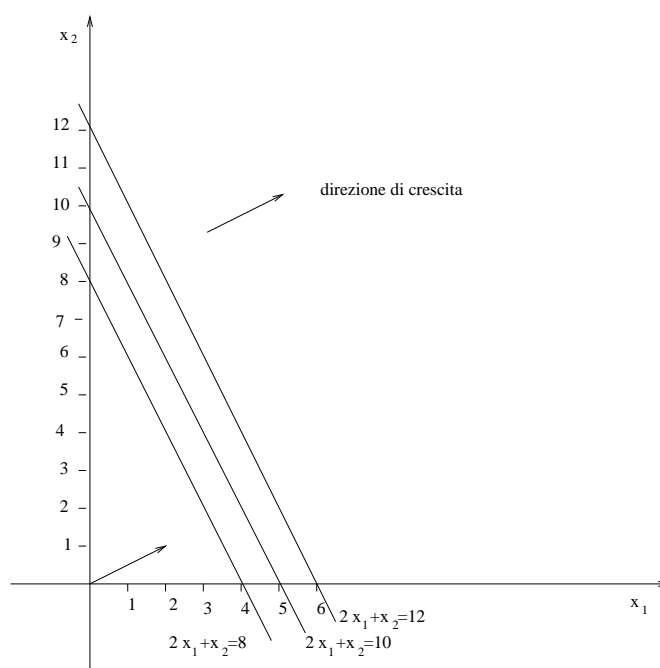


Figura 4.3.3 Rette di livello della funzione  $2x_1 + x_2$

### 4.3.3 Esempi di risoluzione grafica

#### Esempio 4.3.2

Si consideri ora il problema di allocazione ottima di risorse dell'Esempio 3.4.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max (7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Sul piano cartesiano  $Ox_1x_2$  ciascun vincolo individua un semipiano. In particolare, in Figura 4.3.4 è evidenziato il semipiano individuato dal primo vincolo  $x_1 + x_2 \leq 750$ .

In Figura 4.3.5 è evidenziato il semipiano individuato dal secondo vincolo  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$ .

Infine in Figura 4.3.6 è evidenziato il semipiano individuato dal terzo vincolo  $x_2 \leq 400$ .

Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$  rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

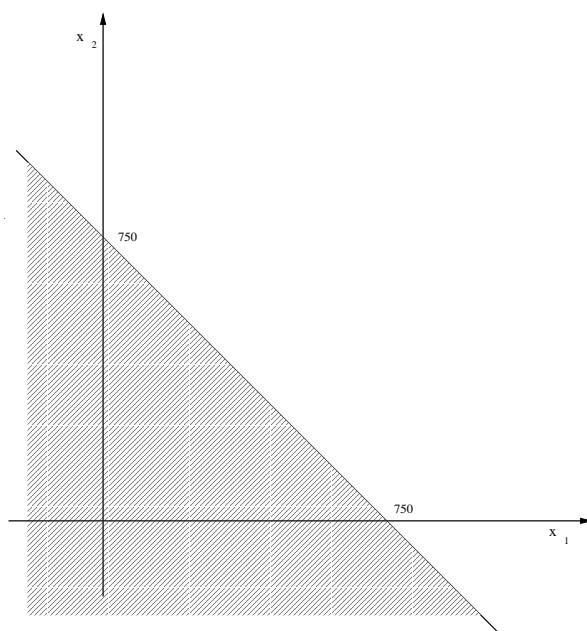


Figura 4.3.4 Semipiano individuato dal vincolo  $x_1 + x_2 \leq 750$

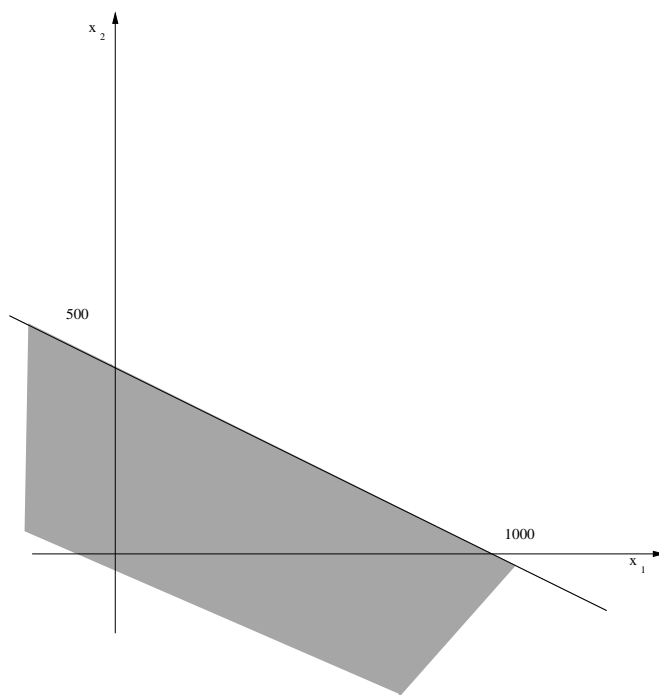


Figura 4.3.5 Semipiano individuato dal vincolo  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$



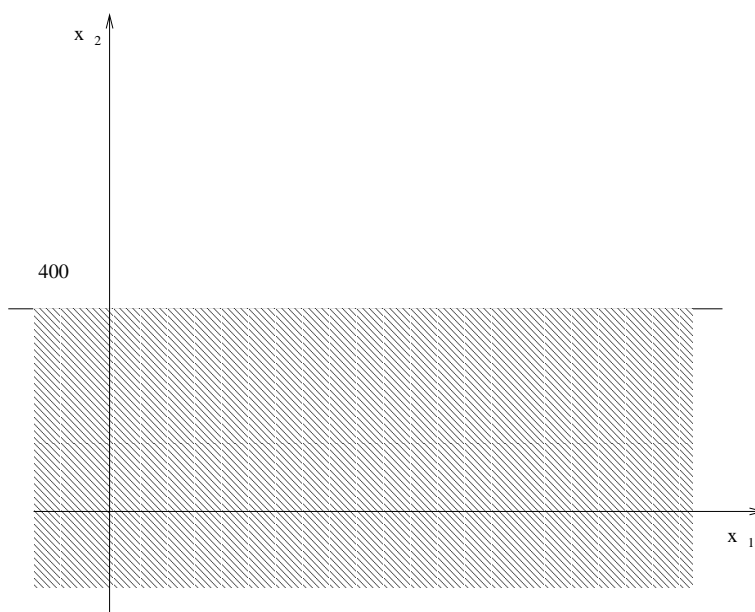


Figura 4.3.6 Semipiano individuato dal vincolo  $x_2 \leq 400$

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 750, x_1 + 2x_2 \leq 1000, x_2 \leq 400, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Tale regione di piano prende nome di *regione ammissibile*, è un insieme convesso ed è rappresentato in Figura 4.3.7.

Tutti i punti  $P(x_1, x_2)$  appartenenti a questa regione sono punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema.

Si consideri ora la funzione obiettivo  $7x_1 + 10x_2$  e si consideri la famiglia di rette

$$7x_1 + 10x_2 = C$$

ottenute al variare del parametro  $C$ . Esse costituiscono le curve di livello della funzione in due variabili  $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$  che sono ovviamente delle rette come rappresentato in Figura 4.3.8.

In riferimento al problema di allocazione ottima rappresentato dal problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando, il parametro  $C$  rappresenta il profitto totale che deve essere massimizzato. Per  $C = 0$  si ottiene la linea di livello passante per l'origine del piano  $Ox_1x_2$ . Ovviamente, scegliendo  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  (che è un punto ammissibile in quanto  $(0, 0) \in S$ ) si ottiene il profitto

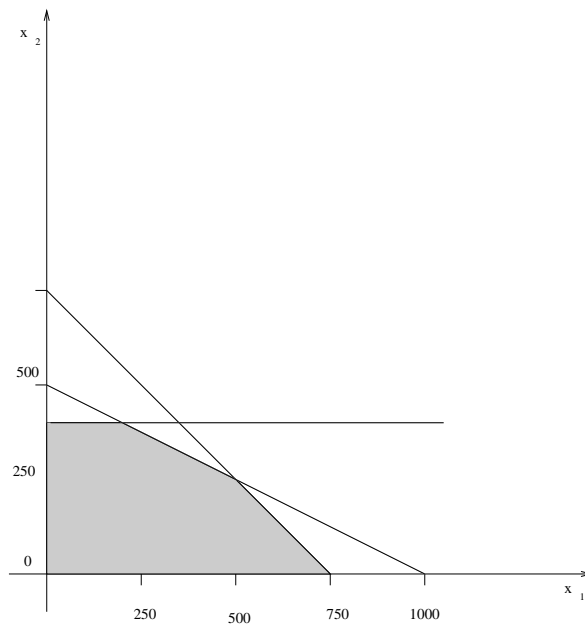


Figura 4.3.7 La regione ammissibile  $S$

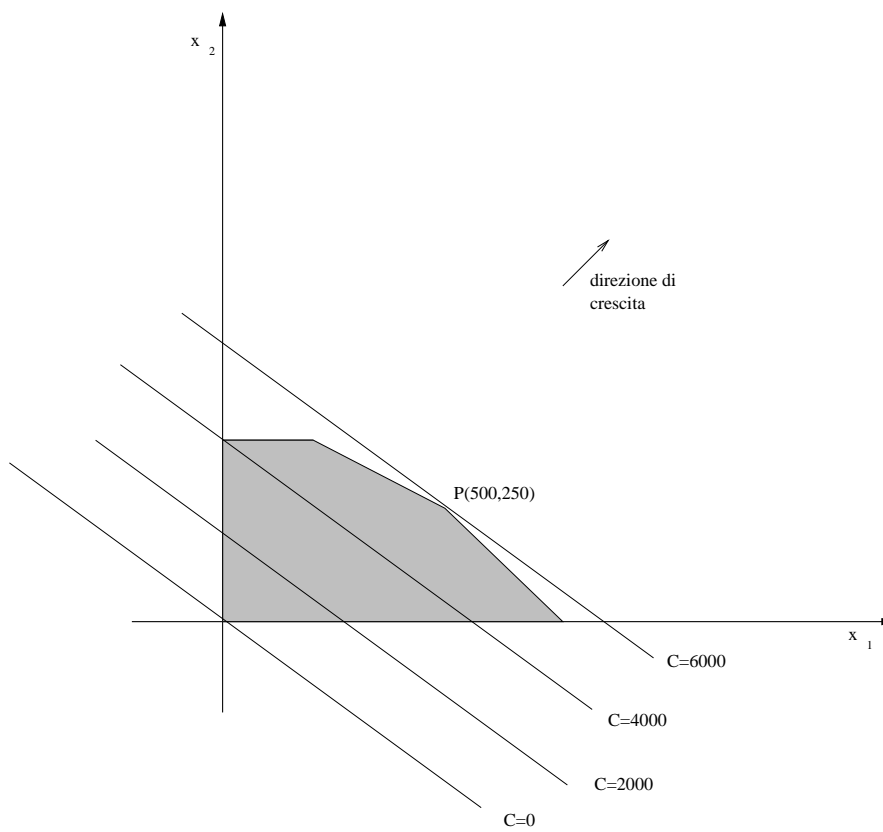


Figura 4.3.8 Curve di livello della funzione  $f(x_1, x_2) = 7x_1 + 10x_2$  e punto di ottimo

totale nullo. All'aumentare del valore di tale profitto, cioè all'aumentare del valore della costante  $C$ , graficamente si ottengono rette parallele alla retta di livello passante per l'origine traslate nella direzione di crescita della funzione  $7x_1 + 10x_2$  data dal vettore  $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$  (Figura 4.3.8). Poiché si desidera massimizzare la funzione obiettivo, si cercherà di raggiungere il valore più alto per la  $C$  ottenuto scegliendo per  $x_1$  e  $x_2$  valori ammissibili cioè tali che  $(x_1, x_2) \in S$ . Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile  $S$  si deduce che all'aumentare di  $C$ , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché  $C \leq 6000$ . Tale valore è ottenuto per  $x_1 = 500$  e  $x_2 = 250$  e non esistono altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori maggiori. Il valore 6000 è, quindi, il massimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2) = (500, 250)$ ; tale punto non è un punto qualsiasi, ma costituisce quello che nella geometria piana viene detto vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile. Il fatto che l'ottimo del problema è raggiunto in corrispondenza di un vertice della regione ammissibile non è casuale, ma come si vedrà in seguito, è una caratteristica fondamentale di un generico problema di Programmazione Lineare. Si osservi fin d'ora che la frontiera della regione ammissibile è definita dalle rette

$$x_1 + x_2 = 750, \quad x_1 + 2x_2 = 1000, \quad x_2 = 400, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

e che ogni intersezione di due di queste rette è un vertice della regione ammissibile; il numero di queste possibili intersezioni (non tutte necessariamente appartenenti alla regione ammissibile) è ovviamente pari al più a 10. Si osservi, infine, che nel punto di ottimo sono attivi i vincoli  $x_1 + x_2 \leq 750$  e  $x_1 + 2x_2 \leq 1000$  mentre non è attivo il vincolo  $x_2 \leq 400$ .

Nel caso particolare che abbiamo esaminando, la soluzione ottima determinata è unica, ma in generale può accadere che le rette di livello della funzione obiettivo siano parallele ad un segmento del perimetro del poligono che delimita la regione ammissibile; in questo caso potrebbe accadere che esistano più punti ammissibili in cui la funzione assume lo stesso valore ottimo e quindi la soluzione non sarebbe più unica; nel problema in esame, ciò accadrebbe, ad esempio, se la funzione obiettivo fosse  $cx_1 + 2cx_2$  con  $c$  costante reale positiva (Figura 4.3.9); infatti, tutti i punti del segmento  $\overline{AB}$  rappresentano soluzioni ottime. Tuttavia, anche in questo caso si può sempre trovare un vertice che costituisce una soluzione ottima.

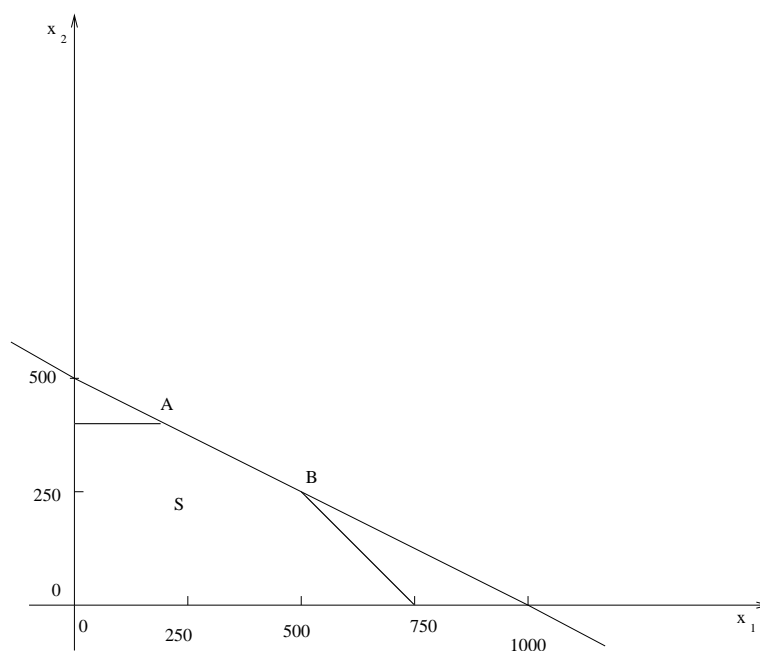


Figura 4.3.9 Esempio di soluzione non unica

**Esempio 4.3.3**

Consideriamo ora il problema di miscelazione dell'Esempio 3.4.12 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nelle figure che seguono rappresentati i vincoli lineari di questo problema; In particolare nella Figura 4.3.10 è evidenziato il semipiano individuato dal vincolo  $140x_1 \geq 70$ . Nella Figura 4.3.11 e nella Figura 4.3.12 sono evidenziati rispettivamente i semipiani individuati dai vincoli  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$  e  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$ .

Ovviamente i vincoli di non negatività delle variabili  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$  rappresentano rispettivamente il semipiano delle ascisse non negative e il semipiano delle ordinate non negative.

L'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare che stiamo esaminando è dato quindi dall'intersezione di tali semipiani e si può indicare con

$$\tilde{S} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 140x_1 \geq 70, 20x_1 + 10x_2 \geq 30, 25x_1 + 50x_2 \geq 75, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

L'insieme  $\tilde{S}$  rappresenta la regione ammissibile del problema di Programmazione Lineare in esame ed è rappresentata in Figura 4.3.13.

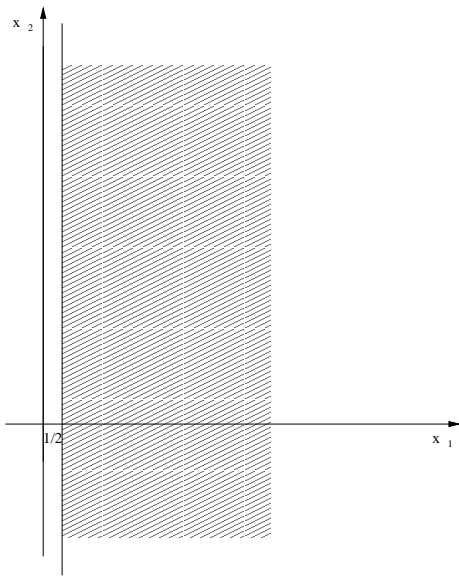


Figura 4.3.10 Semipiano individuato dal vincolo  $140x_1 \geq 70$

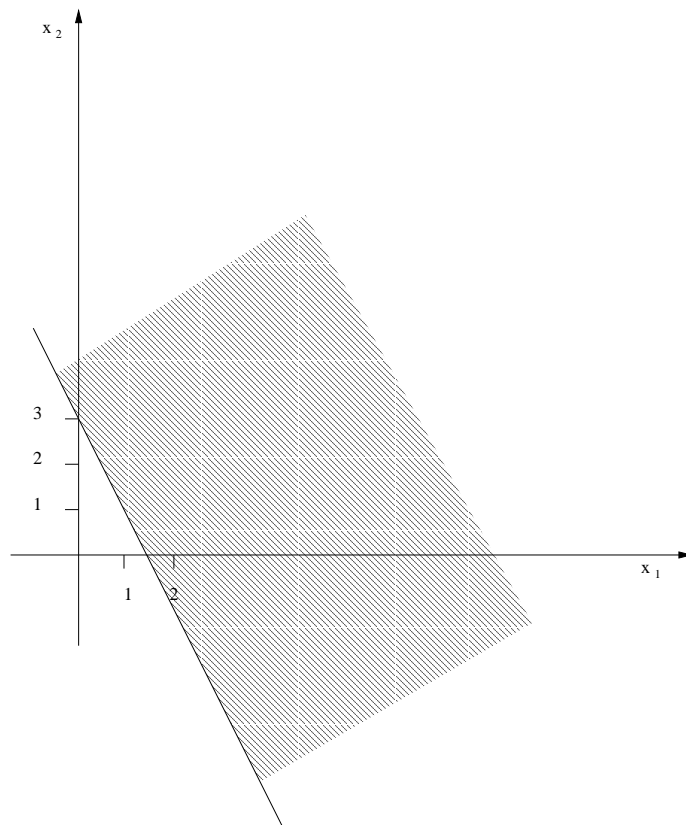


Figura 4.3.11 Semipiano individuato dal vincolo  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$

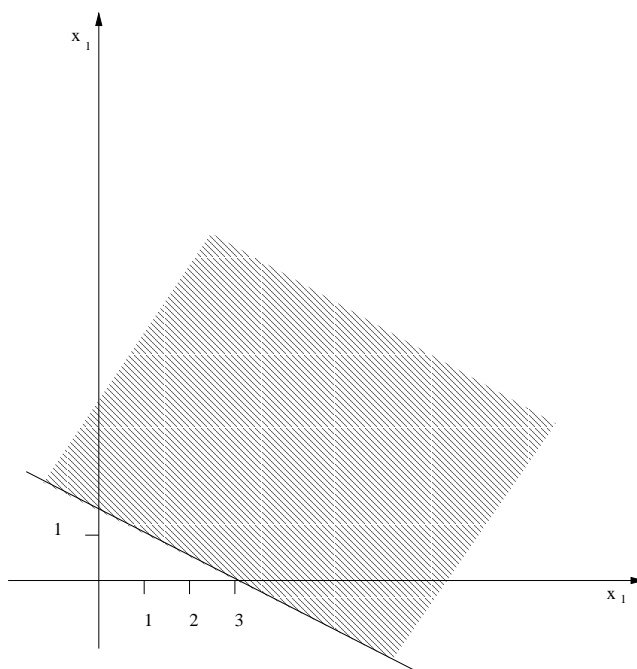


Figura 4.3.12 Semipiano individuato dal vincolo  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$

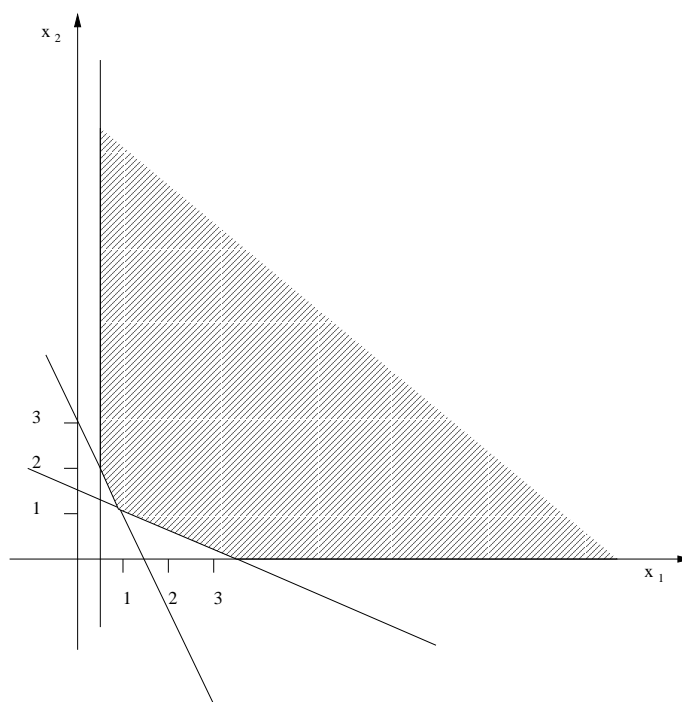


Figura 4.3.13 La regione ammissibile  $\tilde{S}$

Tutti i punti  $P(x_1, x_2)$  appartenenti a questa regione sono punti dell'insieme ammissibile del problema e quindi tutti i punti di questa regione costituiscono soluzioni ammissibili del problema. Si osservi che, a differenza della regione ammissibile del problema considerato nell'esempio precedente, la regione ammissibile  $\tilde{S}$  è illimitata.

Ora, tracciando le curve di livello della funzione obiettivo  $400x_1 + 600x_2$  si ottiene la famiglia di rette

$$400x_1 + 600x_2 = C.$$

Trattandosi di un problema di minimizzazione si vuole determinare il valore piú basso di  $C$  ottenuto scegliendo per  $x_1$  e  $x_2$  valori ammissibili cioè tali che  $(x_1, x_2) \in \tilde{S}$ . Osservando la rappresentazione grafica della regione ammissibile  $\tilde{S}$  e osservando che la direzione di decrescita è quella opposta al vettore  $\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$ , si deduce che al diminuire di  $C$ , le rette di livello della funzione obiettivo intersecano la regione ammissibile finché  $C \geq 1000$  (Figura 4.3.14)

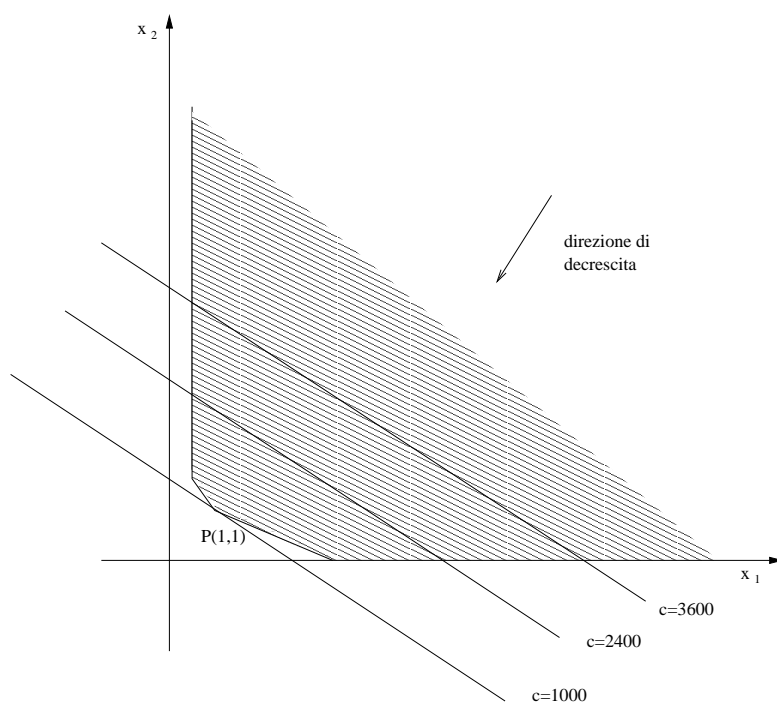


Figura 4.3.14 Curve di livello della funzione  $400x_1 + 600x_2$  e punto di ottimo

Tale valore è ottenuto per  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1$  e non esistono altri punti della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valori minori. Il valore 1000 è, quindi, il minimo valore che la funzione obiettivo può raggiungere soddisfacendo i vincoli. Tale soluzione ottima è raggiunta in corrispondenza del punto  $P$  di coordinate  $(x_1, x_2) = (1, 1)$ ; si osservi che anche in questo caso tale punto è un

punto particolare della regione ammissibile. Si osservi, infine che in questo punto sono attivi i vincoli  $20x_1 + 10x_2 \geq 30$  e  $25x_1 + 50x_2 \geq 75$  mentre risulta non attivo il vincolo  $140x_1 \geq 70$ .

Abbiamo esaminato due esempi di interpretazione geometrica e soluzione grafica di problemi di Programmazione Lineare in due variabili. In entrambe i problemi è stato possibile determinare una soluzione ottima. Tuttavia è facile dedurre, sempre per via geometrica, che un problema di Programmazione Lineare può non ammettere soluzione ottima. Ad esempio, se nell'Esempio 4.3.2 sostituiamo il vincolo  $x_2 \leq 400$  con il vincolo  $x_2 \geq 1000$ , la regione ammissibile sarebbe vuota nel senso che non esisterebbe nessun punto del piano che soddisfa tutti i vincoli. In questo caso il problema risulterebbe inammissibile e questo indipendentemente dalla funzione obiettivo e dal fatto che il problema è in forma di minimizzazione o massimizzazione.

Un altro esempio di problema di Programmazione Lineare che non ammette soluzione ottima si può ottenere considerando il problema dell'Esempio 4.3.3 e supponendo che la funzione obiettivo debba essere massimizzata anziché minimizzata. In questo caso nella regione ammissibile (che è illimitata) la funzione obiettivo può assumere valori arbitrariamente grandi cioè tali che comunque scelto un valore  $M > 0$  esiste un punto in cui la funzione obiettivo assume valore maggiore di  $M$ ; questo significa che il problema è illimitato superiormente e quindi non può esistere una soluzione ottima.

Sulla base di queste considerazioni sulla geometria di un problema di Programmazione Lineare in due variabili si può intuire che le situazioni che si possono verificare sono le seguenti:

- *il problema ammette soluzione ottima* (che può essere o non essere unica) in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile;
- *il problema non ammette soluzione ottima* perché
  - la regione ammissibile è vuota
  - la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se il problema è di massimizzazione) o illimitata inferiormente (se il problema è di minimizzazione).

Quindi se si suppone che esiste un punto ammissibile, cioè che la regione ammissibile sia non vuota, allora sembrerebbe di poter dedurre che o il problema di Programmazione Lineare ammette soluzione ottima in un vertice del poligono convesso che delimita la regione ammissibile oppure è illimitato.



Questi asserti, ora semplicemente dedotti intuitivamente per via geometrica, hanno in effetti una validità generale e verranno enunciati e dimostrati in maniera rigorosa nel prossimo capitolo. Come ultima considerazione intuitiva si vuole ci-

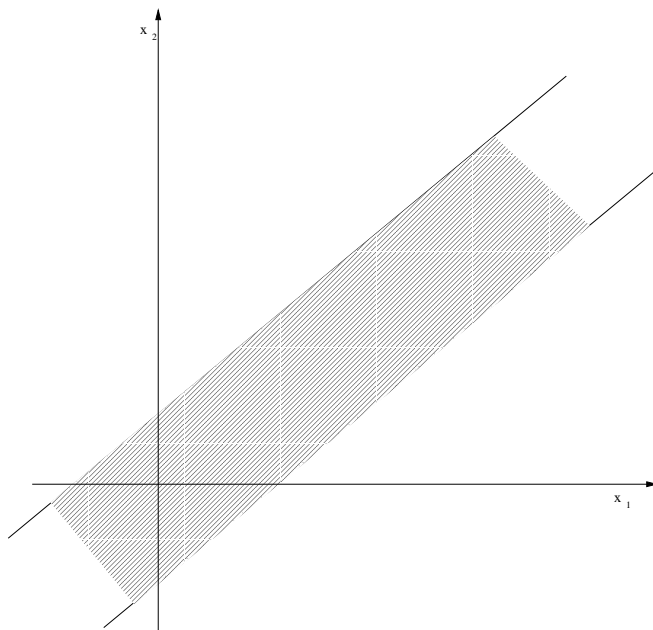


Figura 4.3.15 Regione ammissibile costituita da una striscia di piano

tare la possibilità che la regione ammissibile sia costituita da una striscia di piano, cioè dalla porzione di piano compresa tra due rette parallele (Figura 4.3.15). In questo caso non esistono vertici per la regione ammissibile e il problema risulta illimitato ad eccezione del caso particolare in cui le rette di livello della funzione obiettivo sono parallele alle rette che delimitano la striscia di piano; in questo caso si hanno infinite soluzioni.

La non esistenza di vertici in questo caso si intuisce essere legata al fatto che la regione ammissibile costituita da una striscia di piano *contiene rette*. Infatti nei casi delle regioni ammissibili  $S$  e  $\tilde{S}$  dei problemi di Programmazione Lineare dell'Esempio 4.3.2 e dell'Esempio 4.3.3 non esistono rette contenute in  $S$  o in  $\tilde{S}$ . Anche la regione illimitata  $\tilde{S}$  può contenere semirette, ma non rette.

Ad eccezione del caso particolare della regione ammissibile rappresentata da una striscia di piano, il caso in cui sembrerebbe essere possibile garantire l'esistenza di almeno una soluzione ottima è quello della regione ammissibile che non contiene nemmeno semirette (che è il caso della regione  $S$  dell'Esempio 4.3.2). Anche questa intuizione è vera in generale e verrà formalizzata e dimostrata in maniera rigorosa nel prossimo capitolo.

