

# 6

---

## *Il metodo del simplesso*

Dato un problema di Programmazione Lineare è ovviamente necessario, se il modello fatto deve essere di qualche utilità, essere capaci di “risolverlo”. Nel caso della programmazione lineare si dice che un algoritmo *risolve* un problema di Programmazione Lineare se esso è capace di determinare correttamente se il problema dato ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato oppure, se nessuno di questi due casi risulta verificato, sia capace di individuare una soluzione ottima. Esistono molti algoritmi per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare, spesso implementati in pacchetti software molto diffusi e utilizzati. In questo capitolo forniamo una descrizione della struttura logica del *Metodo del Semplesso* senza però entrare nei suoi dettagli implementativi. Come già accennato, il Metodo del Semplesso è stato il primo algoritmo pratico per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare ed è tuttora il più usato e uno dei più efficienti in pratica.

Per introdurre il modo di operare del Metodo del Semplesso iniziamo con il ricordare che *un poliedro ha sempre un numero finito di vertici* (eventualmente il numero dei vertici, come abbiamo già avuto modo di osservare, può essere zero; in questa analisi introduttiva, supponiamo per semplicità che ciò non si verifichi). Comunque, benchè finito, il numero di vertici di un poliedro può essere arbitrariamente alto. Basta pensare all’area racchiusa da un poligono nel piano. All’aumentare del numero dei lati cresce il numero di vertici. Per fare un altro esempio, consideriamo il poliedro

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Se  $n = 1$  abbiamo ovviamente un segmento, con 2 vertici ( $2 = 2^1$ ). Se  $n = 2$  abbiamo un quadrato, con 4 vertici ( $4 = 2^2$ ). Se  $n = 3$  abbiamo un cubo con 8

vertici ( $8 = 2^3$ ). In generale, per  $n > 3$  l'insieme  $I$  è noto come ipercubo di dimensione  $n$  e ha un numero di vertici pari a  $2^n$ , che quindi cresce *esponenzialmente* con la dimensione dello spazio.

Supponiamo di avere un problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in P, \end{aligned}$$

dove  $P$  è un poliedro che non contiene rette, e di sapere che il problema ammette (almeno) una soluzione ottima. Allora, il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare ci autorizza a limitare la ricerca di una soluzione ottima ai vertici del poliedro  $P$ . Una procedura teorica per la ricerca dell'ottimo, potrebbe essere quindi:

1. Calcola tutti i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_q$  del poliedro  $P$ .
2. Valuta la funzione obiettivo in tutti i vertici e denota con  $v^*$  il vertice per cui si raggiunge il valore minimo:

$$c^T v^* \leq c^T v_i \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

3.  $v^*$  è una soluzione ottima del problema.

Ovviamente questa strategia deve essere completata da procedure in grado di determinare se  $P$  è vuoto o se il problema è illimitato. Inoltre bisogna essere in grado di calcolare i vertici. Ma concettualmente questa è una procedura teoricamente valida. Il problema principale di questo modo di procedere è che siccome il numero di vertici può, ed in generale è, altissimo, essa può diventare computazionalmente così oneroso da risultare impraticabile. Il Metodo del Simplex, nella sostanza, è un modo un po' più raffinato di realizzare lo schema precedente e può, molto grossolonomicamente, essere schematizzato come segue:

1. Determina un vertice iniziale  $v$  di  $P$ ;
2. Decidi se  $v$  è una soluzione ottima;
3. Se  $v$  non è una soluzione ottima allora determina "in modo intelligente" un nuovo vertice  $v$  di  $P$  e torna al passo 2.

Il cuore del metodo è racchiuso nella frase "in modo intelligente". Questo modo intelligente di determinare un nuovo vertice, una volta stabilito che quello corrente non è ottimo, deve essere tale da garantire che, almeno nella maggioranza dei casi

pratici, il metodo non debba visitare che una “piccola” frazione dei vertici di  $P$  prima di trovare un vertice ottimo.

Il Metodo del Simplex si applica a problemi di Programmazione Lineare “*in forma standard*”, ovvero a problemi che presentano una particolare struttura adatta ad essere sfruttata da un punto di vista algoritmico. Quindi, questo capitolo è strutturato nel seguente modo: nel prossimo paragrafo 6.1 viene introdotta la “*forma standard*”; nel paragrafo 6.2 analizziamo in dettaglio i vertici della regione ammissibile di un problema in forma standard; nei successivi paragrafi di questo capitolo studiamo il metodo del simplex.

## 6.1 LA FORMA STANDARD

Fino ad ora abbiamo scritto un generico problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Un problema di Programmazione Lineare in questa forma viene detto problema in *forma generale*. Il Metodo del Simplex assume che il problema di Programmazione Lineare sia nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

che viene chiamata *forma standard*. Come vedremo un problema scritto in forma standard presenta importanti proprietà che possono essere sfruttate nella risoluzione di un problema di Programmazione Lineare. Osserviamo innanzitutto che il poliedro di un problema di Programmazione Lineare in forma standard (che d’ora in poi chiameremo “poliedro in forma standard”), è contenuto nell’ortante positivo e quindi non può contenere rette. Di conseguenza, ad un problema in forma standard si applica sempre il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Inoltre, la struttura dell’insieme ammissibile di un problema in forma standard permette di caratterizzare i vertici dell’insieme ammissibile stesso.

Preliminarmente dimostriamo che assumere che un problema di Programmazione Lineare sia in forma standard non fa perdere di generalità in quanto qualunque problema di Programmazione Lineare può essere trasformato in un problema equivalente in forma standard. Infatti se si ha un problema di Programmazione Lineare nella forma (6.1.1) si può passare ad un problema equivalente con soli vincoli di uguaglianza introducendo un vettore  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \geq 0$ , e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax - u = b \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili  $u$  vengono chiamate *variabili di surplus* e rappresentano la differenza non negativa tra il primo e il secondo membro dei vincoli di disuguaglianza. È immediato ricondurre ad un problema con soli vincoli di uguaglianza anche un problema di Programmazione Lineare scritto nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Infatti sarà sufficiente introdurre un vettore  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \geq 0$ , e riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax + w = b \\ w \geq 0. \end{cases}$$

Le variabili  $w$  vengono chiamate *variabili di slack*.

È inoltre sempre possibile ricondurre un qualsiasi problema di Programmazione Lineare ad un problema equivalente che presenti tutte le variabili vincolate ad essere non negative. Questo può essere facilmente ottenuto attraverso la trasformazione di variabili

$$x = x^+ - x^- \quad (6.1.4)$$

dove  $x^+ \geq 0$  e  $x^- \geq 0$ . Se infatti consideriamo un problema di Programmazione Lineare nella forma (6.1.1), la trasformazione (6.1.4) permette di riscrivere il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T (x^+ - x^-) \\ A(x^+ - x^-) \geq b \\ x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.5)$$

in cui tutte le variabili sono non negative. Si osservi che l'insieme ammissibile di un tale problema con tutte le variabili non negative, è un poliedro che non contiene rette.

**Osservazione 6.1.1** Ovviamente il problema (6.1.5) può essere posto nella seguente forma vettoriale

$$\begin{cases} \min \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A} \tilde{x} \geq b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.6)$$

dove  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$  e  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix}$ . Da questa rappresentazione dell'insieme ammissibile, riscrivendo i vincoli in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ I_n \end{pmatrix} \tilde{x} \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

si vede immediatamente che i coefficienti delle ultime  $n$  righe della matrice dei vincoli formano un insieme di vettori linearmente indipendenti (sono i versori degli assi coordinati).

Da queste considerazioni si deduce immediatamente che si può passare da un problema di Programmazione Lineare in forma generale (6.1.1) ad uno in forma standard (6.1.2) semplicemente introducendo i vettori  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y, z, u \geq 0$  e riscrivendo il problema nella forma

$$\begin{cases} \min c^T(y - z) \\ A(y - z) - u = b \\ y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0. \end{cases}$$

Viceversa, avendo un problema di Programmazione Lineare in forma standard,

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

si può passare facilmente trasformarlo in uno in forma generale riscrivendolo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \bar{A}x \geq \bar{b} \end{cases}$$

dove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0_n \end{pmatrix}$$

**Esempio 6.1.2** Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 \geq 7 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere trasformato in un problema equivalente con vincoli di sola uguaglianza mediante l'introduzione di una variabile di surplus  $x_4$  e una variabile di slack  $x_5$  e scrivendo il problema

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2 + 5x_3) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Questo problema può essere ulteriormente trasformato in un problema equivalente con tutte le variabili vincolate in segno. È sufficiente rappresentare la variabile  $x_2$  che non è vincolata in segno nella forma  $x_2 = x_2^+ - x_2^-$  e scrivere il problema nella forma equivalente

$$\begin{cases} \min (12x_1 + x_2^+ - x_2^- + 5x_3) \\ x_2^+ - x_2^- - 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_2^+ + x_2^- - 2x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

□

## 6.2 VERTICI E SOLUZIONI DI BASE

Come abbiamo visto nell'introduzione di questo capitolo, un punto centrale del metodo del simpleso è la visita dei vertici del poliedro ammissibile. È quindi molto importante disporre di metodi efficaci per l'individuazione e l'analisi dei vertici di un poliedro. Uno dei vantaggi di considerare i problemi di programmazione lineare in forma standard è la particolare caratterizzazione che si può dare per i vertici dei loro insiemi ammissibili.

Per descrivere tale caratterizzazione, consideriamo un generico poliedro in forma standard

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (6.2.1)$$

dove  $A$  è una matrice  $m \times n$  e dove supponiamo che valga la seguente assunzione.

**Assunzione:** il poliedro  $P$  è non vuoto e  $\text{rango}(A) = m$ .

Notiamo che l'assunzione fatta implica  $m \leq n$  e garantisce l'esistenza di almeno una sottomatrice  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  non singolare. Notiamo inoltre che, come vedremo successivamente, tale assunzione non è limitativa.

**Teorema 6.2.1** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Allora  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se le colonne di  $A$  relative alle componenti positive di  $\bar{x}$  sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione:* Riscrivendo le equazioni  $Ax = b$  nella definizione del poliedro (6.2.1) come coppia di disequazioni abbiamo che  $P$  è definito dal sistema di

disequazioni

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ -Ax &\geq -b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

È ovvio che, siccome il punto  $\bar{x}$  è ammissibile, soddisfa le prime  $2m$  disequazioni all'uguaglianza. Supponiamo inoltre, senza perdita di generalità, che le prime  $r$  variabili siano strettamente positive, mentre le ultime  $n - r$  sono nulle. Perciò si ha:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ -A\bar{x} &= -b \\ \bar{x}_{r+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0. \end{aligned}$$

Ora, indicando con  $e_i$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$  con tutte componenti nulle ad eccezione della  $i$ -esima che è pari ad 1, ovvero  $e_i^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , ricordando che  $\bar{x}_i = e_i^T \bar{x}$  ed il Teorema 5.1.5 (in particolare la (5.1.2)), abbiamo che  $\bar{x}$  è un vertice se e solo se il rango della matrice dei vincoli attivi è  $n$ , cioè se e sole se

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{pmatrix} A \\ -A \\ e_{r+1}^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} &= \text{rango} \begin{pmatrix} A & & \\ & 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \\ &= \text{rango} \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = n. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Usando la definizione di rango, l'ultima uguaglianza della (6.2.2) è equivalente al fatto che

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_r & a_{r+1} \cdots a_n \\ 0_{(n-r) \times r} & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{6.2.3}$$

Sfruttando la sua particolare struttura, l'implicazione (6.2.3) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} (a_1 \cdots a_r) y + (a_{r+1} \cdots a_n) z &= 0 \\ &\text{implica} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = 0, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

che, ovviamente, è equivalente al fatto che

$$(a_1 \cdots a_r) y = 0 \quad \text{implica} \quad y = 0, \tag{6.2.4}$$

cioè all'indipendenza lineare delle colonne  $a_1, \dots, a_r$  corrispondenti alle componenti positive di  $\bar{x}$ .  $\square$

Un conseguenza immediata del precedente teorema è il seguente corollario.

**Corollario 6.2.1** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Se  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  allora almeno  $n - m$  componenti di  $\bar{x}$  sono nulle.*

**Esempio 6.2.2** Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 4x_6 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 &= 7 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

e il punto  $x = (2, 1, 1, 1, 0, 0)^T$ . Si verifica facilmente per sostituzione che il punto  $x$  è una soluzione ammissibile del sistema considerato, ma non è un suo vertice. Infatti le colonne di  $A$  relative alle componenti di  $x$  positive

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

non sono linearmente indipendenti (cfr. Corollario 6.2.1)  $\square$

**Esempio 6.2.3** Consideriamo il poliedro  $P$  definito dal seguente sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

e i due punti  $(1, 1, 0, 0)^T$  e  $(0, 0, 0, 1)^T$ . Si verifica immediatamente che i due punti sono ammissibili o, in altri termini, appartengono al poliedro  $P$ . Inoltre, applicando il Teorema 6.2.1, si può constatare che i due punti sono vertici di  $P$ . Nel primo caso infatti

$$\det(a_1 \ a_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

e quindi l'insieme costituito dalla prima e seconda colonna, corrispondenti alle componenti del punto maggiori di 0, è linearmente indipendente. Nel secondo

caso il risultato è ancora più ovvio perché l'insieme costituito dalla sola quarta colonna (diversa da zero) è banalmente linearmente indipendente. Notiamo che per tutti e due i punti il numero di componenti maggiore di zero è minore o uguale a  $m = 2$ .  $\square$

Introduciamo ora alcune definizioni che permetteranno di dare una importante caratterizzazione dei vertici di un poliedro in forma standard. Il punto di partenza è la definizione di sottomatrice di matrice base della matrice  $A$

**Definizione 6.2.4** Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matrice dei coefficienti di un poliedro in forma standard (6.2.1), e siano  $\{a_1, \dots, a_n\}$  l'insieme delle sue colonne. Una sottomatrice  $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  di  $A$  non singolare è detta matrice di base di  $A$ .

Scelta una particolare matrice di base  $B$  di  $A$ , si possono introdurre le seguenti definizioni.

**Definizioni 6.2.5** Data una matrice di base  $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$  di  $A$ :

- la sottomatrice  $N = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_n}) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  di  $A$  è detta matrice delle colonne fuori base di  $A$ ;
- l'insieme  $I_B = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  viene detto insieme degli indici di base;
- l'insieme  $I_N = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  viene detto insieme degli indici fuori base;
- le componenti  $x_i$ ,  $i \in I_B$  vengono dette variabili di base;
- le componenti  $x_i$ ,  $i \in I_N$  vengono dette variabili fuori base;
- ogni vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  può essere partizionato in due sottovettori

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

detti vettore delle variabili di base ( $x_B$ ) e vettore delle variabili fuori base ( $x_N$ ).

**Esempio 6.2.6** Sia dato il seguente sistema

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & x_6 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & + & 2x_6 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo la sottomatrice di  $A$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la sesta, prima e quarta colonna della matrice  $A$  del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che  $\det B = -3$ , abbiamo che  $B$  è una matrice di base di  $A$ , le colonne  $a_6$ ,  $a_1$  e  $a_4$  sono colonne di base e gli indici 6, 1 e 4 sono indici di base.

Consideriamo ora, invece, la sottomatrice di  $A$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta considerando nell'ordine la seconda, quinta e quarta colonna della matrice  $A$  del sistema. In questo caso

$$I_B = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 4\},$$

e, poiché si verifica facilmente che  $\det B = 0$ , abbiamo che  $B$  non una matrice di base di  $A$ .  $\square$

Utilizzando gli insiemi di indici  $I_B$  e  $I_N$  si può riscrivere il sistema  $Ax = b$  nella seguente maniera:

$$\sum_{i \in I_B} a_{ji} x_{j_i} + \sum_{i \in I_N} a_{ji} x_{j_i} = b. \quad (6.2.6)$$

Utilizzando i sottovettori  $x_B$  e  $x_N$ , il sistema (6.2.6) può essere posto nella forma:

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (6.2.7)$$

oppure nella forma:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \quad (6.2.8)$$

Data una matrice di base  $B$ , anche il vettore  $c$  dei coefficienti della funzione obiettivo può essere decomposto nei due sottovettori:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{j_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad c_N = \begin{pmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{j_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m},$$

che rappresentano i coefficienti di costo delle variabili di base e quelli delle variabili fuori base.

Un problema in forma standard può quindi essere riscritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N & (6.2.9) \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

oppure nella forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N & (6.2.10) \\ & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned}$$

**Osservazione 6.2.7** Un problema di Programmazione Lineare in forma standard può essere scritto nella forma equivalente (6.2.9) in tanti modi diversi quante sono le matrici di base di  $A$ .

Utilizzando delle particolari matrici di base del sistema  $Ax = b$  è possibile caratterizzare delle particolari soluzioni ammissibili del problema in forma standard (6.2.9) (oppure (6.2.10)), a questo scopo sono necessarie altre definizioni.

I sistemi (6.2.7) e (6.2.8) mettono in evidenza che il sistema  $Ax = b$  può essere risolto esprimendo il vettore delle variabili base  $x_B$  in funzione del vettore delle variabili fuori base. La particolare soluzione del sistema  $Ax = b$  che si ottiene annullando il vettore delle variabili fuori base viene caratterizzata dalla seguente definizione.

**Definizione 6.2.8** Data una matrice di base  $B$  di  $A$ . Un vettore  $\bar{x}$  è detto Soluzione di Base del sistema  $Ax = b$  se i suoi sottovettori  $\bar{x}_B$  e  $\bar{x}_N$  sono tali che:

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}\end{aligned}$$

**Definizione 6.2.9** Dato un problema in forma standard (6.2.9), una matrice di base  $B$  di  $A$  è detta matrice di base ammissibile se risulta

$$B^{-1}b \geq 0_m.$$

**Definizione 6.2.10** Dato un problema in forma standard (6.2.9) e data una matrice di base ammissibile  $B$  di  $A$ . Un vettore  $\bar{x}$  è detto Soluzione di Base Ammissibile (SBA) del problema (6.2.9) se i suoi sottovettori  $\bar{x}_B$  e  $\bar{x}_N$  sono tali che:

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}\end{aligned}$$

**Esempio 6.2.11** Consideriamo il sistema dell'Esempio 6.2.6 e la prima delle basi ivi presa in considerazione.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

con

$$I_B = \{j_1 = 6, j_2 = 1, j_3 = 4\},$$

Sappiamo già che  $B$  è una matrice di base, verifichiamo se è una matrice di base ammissibile. Risulta

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi} \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Quindi  $B$  è una base ammissibile. La soluzione di base ammissibile associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_6 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una matrice di base diversa, più precisamente

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

corrispondente a

$$I_B = \{j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 6\}.$$

È facile verificare che  $B$  è una matrice di base (il suo determinante è diverso da 0), e che la soluzione di base ad essa associata è

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 16/3 \end{pmatrix} \\ \bar{x}_N &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ovvero

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16/3 \end{pmatrix}.$$

che, ovviamente, non è ammissibile perché la prima e seconda componente sono negative.  $\square$

Possiamo ora studiare la relazione tra SBA e vertici. Vale il seguente teorema.

**Teorema 6.2.2** *Sia  $\bar{x}$  un punto appartenente al poliedro  $P$  definito come in (6.2.1). Allora  $\bar{x}$  è un vertice di  $P$  se e solo se è una SBA.*

*Dimostrazione:* Se  $\bar{x}$  è una SBA, abbiamo, per la definizione stessa di SBA, che  $n - m$  variabili sono sicuramente nulle, quindi vale l'inclusione  $\{i : \bar{x}_i > 0\} \subseteq I_B$ . Quindi abbiamo che le colonne della matrice  $A$  corrispondenti a variabili positive sono un sottoinsieme delle colonne della matrice di base  $B$ . Ma per la definizione di matrice di base, le colonne di  $B$  sono linearmente indipendenti e quindi saranno linearmente indipendenti anche le colonne di qualunque suo sottoinsieme di colonne. Ma allora  $\bar{x}$  è un vertice per il Teorema 6.2.1.

Supponiamo ora che  $\bar{x}$  sia un vertice e mostriamo che esiste una base la cui soluzione di base associata coincide con  $\bar{x}$ . Supponiamo, senza perdita di generalità, che le prime  $r$  componenti di  $\bar{x}$  siano positive e che le restanti componenti siano nulle, supponiamo, cioè, che  $\{i : \bar{x}_i > 0\} = \{1, \dots, r\}$ . Per il Teorema 6.2.1 abbiamo che le colonne  $a_1 \cdots a_r$  sono linearmente indipendenti. Siccome il rango di  $A$  è  $m$ , si ha che  $r \leq m$ . Per il teorema del completamento possiamo trovare  $m - r$  colonne di  $A$  tra le ultime  $n - r$  colonne (supponiamo, senza perdita di generalità, che siano le colonne  $a_{r+1} \cdots a_m$ ), tali che le colonne

$$a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_m$$

siano linearmente indipendenti. Posto

$$B = (a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_m),$$

abbiamo ovviamente che  $B$  è una matrice non singolare. Per far vedere che  $\bar{x}$  è una soluzione di base, sarà ora sufficiente mostrare che

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $r \leq m$ , abbiamo ovviamente che  $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ . Quindi per concludere basta mostrare che  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  o, equivalentemente, visto che  $B$  è non singolare,  $B\bar{x}_B = b$ . Ma, tenendo conto che  $\bar{x}$  appartiene al poliedro (6.2.1), possiamo scrivere

$$b = A\bar{x} = B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = B\bar{x}_B + N0_m = B\bar{x}_B.$$

□

È facile convincersi che il numero di SBA (e quindi il numero di vertici) è finito ed è pari, al massimo, al numero di possibili modi diversi di prendere  $m$  colonne di  $A$  fra  $n$ . Vale cioè il seguente teorema.

**Teorema 6.2.3** *Il numero di SBA (cioè di vertici) è finito e pari, al più, a  $\binom{n}{m}$ .*

Notiamo che in effetti il numero di SBA può essere inferiore al limite massimo di  $\binom{n}{m}$  perché una volta fissate  $m$  colonne di  $A$  queste potrebbero non essere linearmente indipendenti o, anche nel caso lo fossero, la soluzione di base associata può non essere ammissibile.

**Esempio 6.2.12** Si dato il seguente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_4 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= 2 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ( $m = 2$ ) di colonne della matrice  $A$ . Applicando le definizioni di base, soluzione di base e soluzione di base ammissibile, otteniamo i risultati riportati qui di seguito.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>
{1, 2}	Sì	$(2, 1, 0, 0)^T$	Sì
{1, 3}	No	–	–
{1, 4}	Sì	$(-1, 0, 0, 2)^T$	No
{2, 3}	Sì	$(0, 1, -1, 0)^T$	No
{2, 4}	Sì	$(0, 1/3, 0, 4/3)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1/2, 2)^T$	Sì

Come si vede su  $\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6$  possibili combinazioni abbiamo 5 basi di cui solo tre sono ammissibili. □

Dal Teorema 6.2.1 e dal Teorema 6.2.2 segue immediatamente il seguente corollario.

**Corollario 6.2.13** *Una soluzione  $\bar{x} \neq 0_n$  appartenente a  $P$  è una SBA se e solo se le colonne di  $A$  corrispondenti alle componenti di  $\bar{x}$  positive sono linearmente indipendenti.*

Il significato del Teorema 6.2.2 e del Corollario 6.2.13 è che i concetti di vertice di  $P$  e quello di soluzione di base ammissibile sono assolutamente equivalenti. In effetti noi siamo partiti da una formalizzazione *geometrica* del concetto di vertice che si presta bene ai ragionamenti intuitivi (si vedano gli esempi di risoluzione grafica presentati nel paragrafo 4.3) e siamo poi arrivati al concetto algebrico (equivalente) di SBA che si presta meglio al tipo di manipolazione che dovremo introdurre per studiare un algoritmo risolutivo di tipo generale per i problemi di Programmazione Lineare. Nel seguito ci riferiremo principalmente al concetto di SBA, ma, al fine di avere un'idea più intuitiva del significato dei risultati cui perverremo, conviene tenere sempre presente anche il suo aspetto geometrico di vertice, così come introdotto in precedenza.

**Osservazione 6.2.14** La corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili non è biunivoca. Infatti, mentre a ciascuna base ammissibile  $B$  di  $A$  corrisponde una sola soluzione di base ammissibile  $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ , è possibile che una soluzione di base ammissibile sia associata a due basi ammissibili diverse.

**Esempio 6.2.15** Sia dato il seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Compiliamo una tabella analoga a quella dell'Esempio 6.2.12.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{1, 4}	No	–	–
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì

Si vede che abbiamo 4 basi ammissibili, ma solo 2 soluzioni di base ammissibili (ovvero solo due vertici). Infatti tre basi diverse, {1, 3}, {2, 3}, {3, 4}, danno origine ad un'unica soluzione di base,  $(0, 0, 1, 0)^T$ .  $\square$

Risulta abbastanza evidente che la possibilità che a una stessa SBA (equivalentemente, a uno stesso vertice) corrispondano più basi è legato al fatto che nel

vettore  $B^{-1}b$  ci siano degli zeri, che corrispondono al fatto che alcune variabili, che valgono 0, possono indifferentemente essere considerate in base o fuori base. Allo scopo di chiarire il legame tra basi ammissibili e soluzioni ammissibili di base (vertici) introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 6.2.16** *Una soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  è degenera se il numero di componenti positive di  $\bar{x}$  è minore di  $m$ .*

Dalla precedente definizione discende immediatamente che se una soluzione è non degenera allora *ogni* componente del vettore  $B^{-1}b$  è strettamente positiva. Nel caso di soluzioni di base non degeneri la corrispondenza tra basi ammissibili e soluzioni di base ammissibili diviene biunivoca, come mostrato nel seguente teorema.

**Teorema 6.2.4** *Se una soluzione di base ammissibile  $\bar{x}$  è non degenera allora esiste una ed una sola base ammissibile  $B$  tale che*

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= B^{-1}b, \\ \bar{x}_N &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

*Dimostrazione:* Sia  $\tilde{B}$  una base ammissibile di  $A$  diversa da  $B$  e sia  $\tilde{x}$  la soluzione di base associata a  $\tilde{B}$  ovvero:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\tilde{B}} &= \tilde{B}^{-1}b, \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} &= 0_{n-m}.\end{aligned}$$

Poichè  $\tilde{B} \neq B$  abbiamo che almeno una colonna di  $A$ , ad esempio l' $i$ -esima, appartiene a  $B$  e non appartiene a  $\tilde{B}$ . Di conseguenza,  $i \in I_{\tilde{N}}$  che implica  $\tilde{x}_i = 0$ ; mentre  $i \in I_B$  implica  $\bar{x}_i > 0$  (poichè  $\bar{x}$  è non degenera). Perciò  $\tilde{x} \neq \bar{x}$ . Abbiamo quindi che ogni base ammissibile diversa da  $B$  produce una soluzione di base ammissibile diversa da  $\bar{x}$  ed il teorema segue.  $\square$

Se una soluzione  $\bar{x}$  è degenera, allora una o più componenti del vettore  $\bar{x}_B = B^{-1}b$  sono nulle. In tal caso, basi ammissibili diverse possono produrre la stessa soluzione ammissibile di base  $\bar{x}$ .

**Esempio 6.2.17** Con riferimento all' Esempio 6.2.15, completiamo la tabella, aggiungendo l'indicazione di soluzione degenera o meno.

<i>Indici delle colonne</i>	<i>Base</i>	<i>Soluzione di base</i>	<i>Ammissibile</i>	<i>Degenerare</i>
{1, 2}	Sì	$(-1, 1, 0, 0)^T$	No	-
{1, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{1, 4}	No	-	-	-
{2, 3}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì
{2, 4}	Sì	$(0, 1, 0, 1)^T$	Sì	No
{3, 4}	Sì	$(0, 0, 1, 0)^T$	Sì	Sì