6

Il metodo del simplesso

6.1 LA FORMA STANDARD

Esercizio 6.1.1 *Porre il problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

in forma standard.

Si trasformano i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza introducendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & 2x_1 - x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

Si trasformano le variabili non vincolate in segno in variabili vincolate in segno effettuando la sostituzione $x_3 = x_3^+ - x_3^-$:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \\ & x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & 2x_1 - x_3^+ + x_3^- - x_5 = 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3^+ \geq 0, \quad x_3^- \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

In alternativa, si sarebbe potuto procedere in un altro modo; infatti, utilizzando il primo vincolo $x_3 = x_1 + x_2 - 2$, si può eliminare la variabile x_3 ottenendo il problema di PL equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

da cui aggiungendo le variabili di slack x_4 e di surplus x_5 si ha

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

□

6.2 VERTICI E SOLUZIONI DI BASE

Esercizio 6.2.1 *Dimostrare che il vettore* $x = (1\ 0\ 0\ 1)^T$ *è un vertice del poliedro individuato dal seguente sistema di equazioni e disequazioni:*

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta di un poliedro in forma standard. Consideriamo le colonne di A corrispondenti a componenti non nulle di x, (x_1 e x_4), cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiché sono linearmente indipendenti, il punto dato è un vertice del poliedro. □

Esercizio 6.2.2 *Elencare i vertici del poliedro:*

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 & \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3 & \\ x_i \geq 0, & i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Si tratta dell'insieme ammissibile di un problema in forma standard. Quindi i vertici sono le SBA, cioè al più $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, in questo caso, 6. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, e verifichiamo se costituiscono una base (cioè se sono indipendenti). Tra le possibili basi dobbiamo poi individuare quelle ammissibili.
Si ottiene:

$$(1)\ I_B = \{3,4\} \quad x_1 = x_2 = 0; \quad \begin{cases} 3x_3 = 2 \\ -x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$(2)\ I_B = \{2,4\} \quad x_1 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases},$$

$$(3)\ I_B = \{2,3\} \quad x_1 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \frac{11}{2} \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

$$(4)\ I_B = \{1,4\} \quad x_2 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(5)\ I_B = \{1,3\} \quad x_2 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(6)\ I_B = \{1,2\} \quad x_3 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Possiamo riassumere schematicamente questa situazione con una tabella in cui riportiamo per ciascuna coppia di colonne la verifica se la matrice individuata è di base e se la corrispondente soluzione di base è ammissibile.

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1,2\}$	Sì	No
$\{1,3\}$	Sì	No
$\{1,4\}$	Sì	Sì
$\{2,3\}$	Sì	No
$\{2,4\}$	Sì	Sì
$\{3,4\}$	Sì	Sì

Quindi abbiamo solo tre soluzioni di base ammissibili (vertici) che sono:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 6.2.3 *Elencare i vertici del poliedro descritto dal sistema:*

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ &-x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ &x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

Analogo all'esercizio precedente. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaminiamo tutte le possibili coppie ($m = 2$) di colonne della matrice A, verifichiamo se costituiscono una base ammissibile e calcoliamo la soluzione.

$$(1)\ I_B = \{3,4\} \quad x_1 = x_2 = 0; \quad \begin{cases} -x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -5 \end{cases};$$

$$(2)\ I_B = \{2,4\} \quad x_1 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = 7 \end{cases};$$

$$(3)\ I_B = \{2,3\} \quad x_1 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = 7/3 \end{cases};$$

$$(4)\ I_B = \{1,4\} \quad x_2 = x_3 = 0; \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases};$$

$$(5)\ I_B = \{1,3\} \quad x_2 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_3 = 3/2 \end{cases};$$

$$(6)\ I_B = \{1,2\} \quad x_3 = x_4 = 0; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \end{cases}.$$

Complessivamente possiamo compilare la seguente tabella:

Indici delle colonne	Base	SBA
$\{1,2\}$	sì	no
$\{1,3\}$	sì	sì
$\{1,4\}$	sì	sì
$\{2,3\}$	sì	sì
$\{2,4\}$	sì	sì
$\{3,4\}$	sì	no

Quindi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□