6.3 INTRODUZIONE AL METODO DEL SIMPLESSO

Il Metodo del Simplesso permette di risolvere problemi di Programmazione Lineare in *forma standard*, cioè problemi di Programmazione Lineare della forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Il fatto di considerare solamente problemi di Programmazione Lineare in *forma standard* non costituisce una limitazione infatti, per quanto visto precedentemente nel paragrafo 6.1, è sempre possibile trasformare facilmente un problema di Programmazione Lineare in forma generale in uno in forma standard e viceversa.

Anche il metodo del Simplesso trae ispirazione dal Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e si basa sull'idea di cercare una possibile soluzione del problema di Programmazione Lineare tra i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema. Gli elementi caratterizzanti di questo metodo sono:

- la capacità di selezionare in maniera efficiente i vertici che visita;
- il fatto di passare da un vertice ad un'altro senza richiedere inversioni di matrici o soluzioni di sistemi di equazioni;
- l'uso di semplici criteri che permettono di individuare il vertice ottimo o di concludere che il problema di Programmazione Lineare non ammette soluzioni in quanto è illimitato inferiormente.

Come si vedrà nel seguito, queste importanti caratteristiche sono ottenute grazie ad un uso molto efficiente delle basi ammissibili della matrice A. Tali basi permettono, da una parte, di individuare facilmente un vertice dell'insieme ammissibile (una soluzione di base ammissibile) e, dall'altra parte, di sfruttare i vincoli di uguaglianza dell'insieme ammissibile per esprimere un gruppo di variabili (le variabili di base) in funzione delle altre (le variabili non di base).

Tuttavia ha senso parlare di matrici di base ammissibili e di soluzioni di base ammissibili solamente se il poliedro che rappresenta l'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare è non vuoto e la matrice dei vincoli di uguaglianza del poliedro ha tutte le righe linearmente indipendenti (cioè ha rango massimo).

Ci sono varie realizzazioni del metodo del simplesso che si differenziano nella particolare tecnica usata per verificare che il problema di Programmazione Lineare è ammissibile, controllare il rango della matrice dei vincoli di uguaglianza e per determinare la prima base ammissibile. Nel seguito descriviamo un particolare realizzazione che si divide in due fasi.

Nella **Fase I** viene controllata l'ammissibilità del problema da risolvere; vengono individuati ed eliminati i vincoli di uguaglianza linearmente dipendenti dagli altri (cioè sovrabbondanti) fino a ottenere un sistema di vincoli di uguaglianza descritto da una matrice a rango massimo; viene identificata una base ammissibile B della matrice dei vincoli di uguaglianza e vengono calcolati la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.

Nella **Fase II** viene risolto il problema di programmazione lineare, tale risultato è ottenuto partendo dalla base ammissibile B calcolata nella Fase I ed effettuando i seguenti passi (che utilizzano solamente la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$):

- si calcola la soluzione di base ammissibile associata alla base ammissibile B,
- si controlla se la soluzione di base ammissibile soddisfa un criterio sufficiente di ottimalità,
- si controlla se il problema soddisfa un criterio sufficiente di illimitatezza,
- se nessuno dei due criteri è soddisfatto, viene determinata una nuova base ammissibile $\tilde{B}$ e vengono calcolati la nuova matrice $\tilde{B}^{-1}\tilde{N}$ ed il nuovo vettore $\tilde{B}^{-1}b$;

i precedenti passi vengono ripetuti fino a determinare una soluzione ottima del problema oppure a concludere che il problema è illimitato inferiormente.

Nel seguito si descriverà ed analizzerà prima la Fase II del metodo del simplesso, in quanto l'algoritmo definito per questa fase verrà utilizzato per risolvere il problema della Fase I del metodo del simplesso.

6.4 LA FASE II DEL METODO DEL SIMPLESSO

La Fase II del metodo del simplesso affronta il problema (6.3.1) supponendo vere le seguenti assunzioni.

Assunzioni:

i) *l'insieme ammissibile del problema (6.3.1) è non vuoto;*

ii) rango$(A) = m$;

iii) *data una base ammissibile B, si hanno a disposizione la matrice $B^{-1}N$ ed il vettore $B^{-1}b$.*

Per quanto visto precedentemente, l'assunzione iii) può essere sfruttata per riscrivere il problema nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Questa forma mette in evidenza il fatto che il vettore x_B è funzione del vettore x_N infatti:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N. \tag{6.4.2}$$

Sostituendo l'espressione di x_B nella funzione obiettivo del problema (6.4.1) si ottiene una nuova forma equivalente del problema (6.3.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N \\ & x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ & x_B \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}, \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

dove in vettore γ è detto *vettore dei costi ridotti* ed è dato da:

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Il problema (6.4.3) viene detto *problema in forma canonica rispetto alla base B*.

Le variabili x_B possono essere eliminate dal problema (6.4.3), si ottiene il *problema ridotto*:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N) x_N \qquad (6.4.4) \\ & B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0_m \\ & x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Il problema (6.4.4), nelle sole variabili x_N, è equivalente al problema (6.3.1). In particolare, risulta ovvio verificare quanto segue:

un vettore $\hat{x}$, costituito dai sottovettori $\hat{x}_B$ e x_N, è una soluzione ammissibile di (6.3.1) se e solo se il vettore $\hat{x}_N$ è una soluzione ammissibile di (6.4.4) e $\hat{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\hat{x}_N$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo del problema (6.3.1) calcolata in $\hat{x}$ è uguale al valore della funzione obiettivo del problema ridotto calcolata in $\hat{x}_N$. Di conseguenza, se $\bar{x}$ è la soluzione di base ammissibile associata alla matrice B (cioè $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$), abbiamo che $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è la soluzione corrispondente del problema ridotto e che $c^T B^{-1}b$ è il valore della funzione obiettivo per entrambi i problemi.

I coefficienti di x_N nella funzione obiettivo del problema ridotto sono le componenti del vettore γ da cui segue il nome vettore dei costi (o coefficienti) ridotti.

6.4.1 Criterio di ottimalità

Data una base ammissibile e, quindi, una soluzione di base ammissibile associata, il primo passo che affronta il metodo del simplesso è quello di cercare di capire se questa soluzione di base ammmissibile è una soluzione ottima del problema. A questo fine, gioca un ruolo fondamentale il seguente criterio di ottimalità.

Teorema 6.4.1 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (6.3.1).* Se *il vettore dei costi ridotti è non negativo, ovvero* se*:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B \geq 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è ottima *per il problema (6.3.1).*

Dimostrazione: Si deve dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, allora per una qualunque vettore ammissibile x risulta

$$c^T x \geq c^T \bar{x}.$$

Sia x un qualsiasi punto ammissibile del problema (6.3.1) si ha:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

e ricordando l'espressione (6.4.2) di x_B

$$c^T x = c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi si ha $\gamma \geq 0$ e per l'ammissibilità di x si ha $x_N \geq 0$, da cui si ottiene:

$$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T 0_{n-m} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla matrice di base B è ottima per il problema (6.3.1). □

Dal precedente teorema si può derivare il seguente corollario.

Corollario 6.4.1 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (6.3.1).* Se *il vettore dei costi ridotti è positivo, ovvero* se*:*

$$\gamma = c_N - (B^{-1}N)^T c_B > 0_{n-m},$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla base B (cioè il vettore che dato da $\bar{x}_B = B^{-1}b$ e $\bar{x}_N = 0_{n-m}$) è l'unica soluzione ottima *del problema (6.3.1).*

Dimostrazione: Ripetendo gli stessi argomenti usati nella prova del Teorema 6.4.1, si ottiene che per ogni vettore x ammissibile

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N > c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}, \tag{6.4.5}$$

dove la stretta disuguaglianza segue dall'ipotesi che $\gamma > 0$ e dal fatto che ogni punto ammissibile x distinto da $\bar{x}$ deve avere $x_N \geq 0_{n-m}$ e $x_N \neq 0_{n-m}$. Dalla (6.4.5) segue che la soluzione di base ammissibile è l'unica soluzione ottima per il problema (6.3.1) □

I risultati appena descritti ci consentono di formulare un *criterio sufficiente di ottimalità* per una soluzione di base ammissibile.

Esempio 6.4.2 Consideriamo il seguente problema di PL.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & & x & \geq & 0.
\end{array}$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1, 3 e 4 ($I_B = \{1, 3, 4\}$ e $I_N = \{2, 5, 6\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1,1,1)^T, \quad c_N = (2,1,1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (10/3, 1/3, 7/3).$$

Siccome i coefficienti ridotti sono tutti positivi abbiamo identificato una soluzione ottima che è anche l'unica. Tale soluzione ottima è data da

$$x_B = B^{-1} b = (1,0,2)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1,0,0,2,0,0,)^T.$$

Esempio 6.4.3 Consideriamo di nuovo il problema dell'Esempio 6.4.2, e consideriamo la base costituita dalle colonne 1, 4 e 6 ($I_B = \{1,4,6\}$ e $I_N = \{2,3,5\}$). Abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$c_B = (1,1,1)^T, \quad c_N = (2,1,1)^T, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i coefficienti ridotti.

$$\gamma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (-5/2, -7/2, 3/2).$$

Calcoliamo anche la soluzione di base associata.

$$x_B = B^{-1} b = (1,2,0)^T, \quad x_N = 0_3,$$

per cui

$$x = (1,0,0,2,0,0,)^T.$$

Come si vede la soluzione di base trovata è la stessa trovata nell' Esempio 6.4.2, ed è quindi ottima (si tratta ovviamente di una SBA degenere). Come si vede il test impiegato non è stato capace, in questo caso, di determinare il fatto che la soluzione corrente è ottima. Questo perché il criterio impiegato è solo sufficiente, ma non necessario.

6.4.2 Criterio di illimitatezza

Se il criterio di ottimalità non è verificato il metodo del simplesso cerca di capire se il problema da risolvere sia illimitato inferiormente.

Il fallimento del criterio di ottimalità implica:

$$\{i \in \{1, \ldots, n-m\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset.$$

In questa situazione si può considerare il seguente criterio sufficiente di illimitatezza (inferiore) del problema (6.3.1).

Teorema 6.4.2 *Data una base ammissibile B della matrice A del problema (6.3.1).* Se *per qualche indice $i \in \{1, \ldots, n-m\}$ abbiamo che:*

(i) $\gamma_i < 0$

(ii) *la colonna i-esima della matrice $B^{-1}N$ è tutta non positiva, cioè $(B^{-1}N)_i \leq 0_m$,*

allora il problema (6.3.1) è illimitato inferiormente.

Dimostrazione: La dimostrazione è costruttiva. Facciamo cioè vedere che, nelle ipotesi poste, possiamo trovare una semiretta di punti $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, sempre contenuta nell'insieme ammissibile e tale che il valore della funzione obiettivo $c^T x(\rho)$ diminuisca indefinitamente al crescere di ρ. Consideriamo un vettore del tipo $x(\rho)$, con $\rho \geq 0$, dato da:

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N(\rho)$$

$$x_N(\rho) = \rho e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{ i-esima componente.}$$

Per definizione, il vettore $x(\rho)$ soddisfa il vincolo $Ax(\rho) = b$. Si tratta di una soluzione ammissibile se risulta anche $x_B(\rho) \geq 0$, $x_N(\rho) \geq 0$. Per valori positivi di ρ abbiamo che, ovviamente risulta $x_N(\rho) \geq 0$. D'altra parte

$$x_B(\rho) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N(\rho) = B^{-1}b - \rho(B^{-1}N)_i \geq 0_m,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla (ii). Quindi sono verificati i vincoli del problema (6.3.1). Il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è

$$c_B^T B^{-1}b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1}b + \gamma_i \rho.$$

Da ciò si vede, tenendo conto che $\gamma_i < 0$ per la (i), che, al crescere di ρ, la funzione obiettivo del problema (6.3.1) può assumere valori piccoli a piacere in punti ammissibili. □

Esempio 6.4.4 Consideriamo il problema di PL seguente.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & & & & & x & \geq & 0.
\end{array}
$$

Consideriamo la base formata dalle colonne 1 e 4 ($I_B = \{1,4\}$ e $I_N = \{2,3\}$). Abbiamo:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

$$
c_B = (-1,0)^T, \quad c_N = (-1,0)^T, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Calcoliamo la matrice $B^{-1}N$ e i coefficienti ridotti

$$
B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = (-2,1).
$$

Notiamo che in corrispondenza al coefficiente ridotto della prima variabile non in base (x_2), che è negativo, la prima colonna della matrice $B^{-1}N$ contiene solo elementi non positivi. Quindi possiamo concludere che il problema è illimitato inferiormente.

6.4.3 Determinazione di una nuova base ammissibile

Data una soluzione di base ammissibile

$$
\bar{x} : \begin{cases} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0_{n-m} \end{cases}
$$

del problema (6.3.1), nel caso in cui i criteri di ottimalità ed illimitatezza, applicati ad $\bar{x}$, non siano soddisfatti, il metodo del simplesso cerca di determinare una nuova soluzione di base ammissibile o, almeno, una nuova base ammissibile del problema.

Nel seguito, per semplicità, le colonne della matrice $B^{-1}N$ saranno indicate da $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}\}$, cioè:

$$
B^{-1}N = (\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}).
$$

Come già osservato se il criterio di ottimalità non è soddisfatto si ha:

$$\Big\{ i \in \{1,\ldots,n-m\} : \gamma_i < 0 \Big\} \neq \emptyset. \tag{6.4.6}$$

Mentre se non è soddisfatto il criterio di illimitatezza, allora per ogni indice $h \in \{1,\ldots,n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ si ha:

$$\Big\{ k \in \{1,\ldots,m\} : (\pi_h)_k > 0 \Big\} \neq \emptyset. \tag{6.4.7}$$

Perciò in questa sezione si considererà il caso in cui sia la (6.4.6) sia la (6.4.7) sono sempre verificate.

Falliti i due criteri, il metodo del simplesso cerca di costruire una nuova soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1), cioè un punto

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{cases}$$

che, per essere diverso da $\bar{x}$, *deve avere almeno una componente del vettore $\tilde{x}_N$ è diversa da zero.* Infatti, se $\tilde{x}_N = 0_{n-m}$, allora $\tilde{x}_B = B^{-1}b$ ed $\tilde{x} = \bar{x}$.

L'idea base del Metodo del Simplesso è quella di modificare *una sola componente del vettore x_N*, ad esempio l'h-esima (ricordando la definizione di x_N si ha $(x_N)_h = x_{j_{m+h}}$), portandola da zero ad un valore positivo ρ. Formalmente viene considerata la seguente semiretta di punti:

$$x(\rho) : \begin{cases} x_B(\rho) = B^{-1}b - \rho B^{-1}Ne_h \\ \\ x_N(\rho) = \rho e_h \end{cases} \tag{6.4.8}$$

dove ρ è un numero reale non negativo, e_h è l'h-esimo vettore unitario con $n-m$ componenti e l'espressione del sottovettore $x_B(\rho)$ è data dalla (6.4.2) che nasce dalla necessità di soddisfare i vincoli di uguaglianza del problema originario.

Dopo aver definito il generico punto $x(\rho)$ rimangono da risolvere le due seguenti questioni:

- quale variabile fuori base modificare, cioè come scegliere l'indice h;
- quanto variare la variabile fuori base scelta, cioè quale valore assegnare allo scalare ρ.

Scelta dell'indice h

Per quanto riguarda la scelta dell'indice h, ovvero di quale variabile fuori base modificare, il Metodo del Simplesso fa riferimento al fatto di cercare di determinare dei nuovi punti in cui la funzione obiettivo sia diminuita (o, al peggio non sia aumentata). In particolare il seguente teorema indica una scelta opportuna per l'indice h

Teorema 6.4.3 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (6.3.1). Sia $\bar{x}$ la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ è tale che*

$$\gamma_h \leq 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (6.4.8) con $\rho \geq 0$, ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello di $\bar{x}$, cioè

$$c^T x(\rho) \leq c^T \bar{x}.$$

Dimostrazione: Utilizzando l'espressione di $x_B(\rho)$ e di $x_N(\rho)$ date dalla (6.4.8), si ha:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma^T e_h,$$

ricordando che $\gamma^T e_h = \gamma_h$ e che, per ipotesi, $\gamma_h \leq 0$, si ottiene:

$$c^T x(\rho) = c_B^T B^{-1} b + \rho \gamma_h \leq c_B^T B^{-1} b = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c^T \bar{x}$$

e quindi che il valore della funzione obiettivo in $x(\rho)$ è minore o uguale al valore della funzione obiettivo in $\bar{x}$. □

Una semplice conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 6.4.5 *Data una matrice di base ammissibile B del problema (6.3.1). Sia $\bar{x}$ la soluzione di base ammissibile associata e sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti. Se l'indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ è tale che*

$$\gamma_h < 0,$$

allora, il punto $x(\rho)$ definito dalla (6.4.8) con $\rho > 0$, ha un valore della funzione obiettivo inferiore a quello di $\bar{x}$, cioè

$$c^T x(\rho) < c^T \bar{x}.$$

Scelta del valore dello scalare $\boldsymbol{\rho}$

Il valore dello scalare ρ, oltre ad indicare il valore della variabile fuori base scelta, influenza anche il valore delle variabili di base. Perciò nello scegliere il valore di ρ si deve prima di tutto tener conto della ammissibilità del punto prodotto $x(\rho)$. Il passo successivo è quello di far vedere che esiste un valore $\bar{\rho}$ che permette di identificare un punto $x(\bar{\rho})$ che è una soluzione di base ammissibile (e quindi un vertice) del problema (6.3.1).

Il teorema che segue riporta la scelta dello scalare $\bar{\rho}$ sulla base del cosiddetto *criterio del rapporto minimo.*

Teorema 6.4.4 *Data una matrice di base ammissibile* $B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, \dots, a_{j_m})$ *del problema (6.3.1). Sia* γ *il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia* h *un indice tale che* $\gamma_h < 0$ *e siano* $\bar{\rho}$ *lo scalare e* k *l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}. \tag{6.4.9}$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ *(con* $x(\rho)$ *definito da (6.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) e la matrice di base ammissibile* $\tilde{B}$ *associata è data da:*

$$\tilde{B} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}, a_{j_{m+h}}, a_{j_{k+1}}, \dots, a_{j_m}), \tag{6.4.10}$$

ovvero

$$\tilde{x} : \begin{cases} \tilde{x}_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} b \\ \tilde{x}_{\tilde{N}} = 0_{n-m}, \end{cases}$$

dove

$$\tilde{x}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{k-1}} \\ \tilde{x}_{j_{m+h}} \\ \tilde{x}_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_m} \end{pmatrix} \qquad \tilde{x}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_{m+h-1}} \\ \tilde{x}_{j_k} \\ \tilde{x}_{j_{m+h+1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Come già anticipato, la scelta dell'indice k secondo la (6.4.9) viene usualmente denominata scelta basata sul *criterio del rapporto minimo.*

Osservazione 6.4.6 L'interpretazione del Teorema 6.4.4 è la seguente: supponiamo di avere una base ammissibile B e supponiamo che non sia soddisfatto il criterio di ottimalità né quello di illimitatezza. Allora, se si considera una nuova soluzione di base corrispondente alla base $\tilde{B}$ ottenuta facendo entrare nella base B una qualunque variabile alla quale è associato un costo ridotto negativo e facendo uscire una variabile scelta secondo il criterio del rapporto minimo (6.4.9) indicato dal Teorema 6.4.4, questa nuova soluzione è ammissibile e ha un valore della funzione obiettivo non superiore a quello della soluzione di base precedente.

Osservazione 6.4.7 Nel criterio del rapporto minimo (6.4.9) il minimo può essere raggiunto in corrispondenza a più di un indice, ovvero l'indice k può non essere univocamente determinato. In questo caso si può fare uscire dalla base una qualunque delle variabili in corrispondenza alle quali si è raggiunto il minimo. È facile verificare che in questo caso la nuova soluzione di base è degenere. Più precisamente saranno nulle tutte le componenti della soluzione di base corrispondenti agli indici per cui si è raggiunto il minimo nella (6.4.9) (oltre, ovviamente alle componenti non in base).

Osservazione 6.4.8 Dal criterio del rapporto minimo (6.4.9) si deduce facilmente che $\bar{\rho} = \dfrac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k}$ è nullo se e solo se $(B^{-1}b)_k = 0$. Di conseguenza, una *condizione necessaria* per avere $\bar{\rho} = 0$ è che risulti $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione $\bar{x}$ associata alla base B sia *degenere*. In tal caso, si ha che la k-esima componente di $\tilde{x}_B$ e l'h-esima componente di $\tilde{x}_N$ hanno entrambe valore zero. Pertanto, il vettore $\tilde{x}$, ottenuto da $\bar{x}$ scambiando tali componenti, coincide con $\bar{x}$, ovvero

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Si osservi inoltre che in questo caso la nuova soluzione di base ammissibile coincide con la vecchia mentre la nuova base ammissibile $\tilde{B}$ è diversa dalla vecchia base B (si veda l'Osservazione 6.2.14).

A questo punto sorge naturale chiedersi se la condizione $(B^{-1}b)_i = 0$ per qualche indice i, ovvero che la soluzione è degenere, è anche una *condizione sufficiente* affinché $\bar{\rho}$ sia nullo. La risposta è negativa: infatti è possibile che il valore $\bar{\rho}$ sia diverso da zero in corrispondenza ad una soluzione degenere. Dalla definizione di $\bar{\rho}$ data dalla (6.4.9) si deduce che tale situazione si verifica quando ad ogni componente nulla del vettore $B^{-1}b$, corrisponde una componente *non positiva* di π_h, ovvero $(\pi_h)_i \leq 0$.

Dalla precedenti osservazioni segue il seguente corollario del Teorema 6.4.4

Corollario 6.4.9 *Sia B una matrice di base ammissibile del problema (6.3.1) associata ad un vertice $\bar{x}$ non degenere. Sia γ il corrispondente vettore dei coefficienti ridotti, sia h un indice tale che $\gamma_h < 0$ e siano $\bar{\rho}$ lo scalare e k l'indice dati da:*

$$\bar{\rho} = \frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\}.$$

Allora, il punto $\tilde{x} = x(\bar{\rho})$ (con $x(\rho)$ definito da (6.4.8)) è una soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) tale che:

$$c^T\tilde{x} < c^T\bar{x}.$$

6.4.4 Calcolo della nuova matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ e del nuovo vettore $\widetilde{B}^{-1}b$: operazione di pivot

I teoremi visti nel paragrafo precedente mostrano che, data una base ammissibile B, se non è verificato il criterio sufficiente di ottimalità né quello sufficiente di illimitatezza è sempre possibile determinare una nuova base ammissibile $\widetilde{B}$, data dalla (6.4.10), a cui corrisponde un vertice con un valore della funzione obiettivo non superiore ripetto al valore precedente. In linea di principio possiamo a questo punto calcolare *ex novo* $\widetilde{B}^{-1}$, e quindi $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ e $\widetilde{B}^{-1}b$ che sono le quantità necessarie per calcolare il nuovo vertice ed per effettuare i nuovi test di ottimalità e di illimitatezza. Questa procedura non è però realizzabile in pratica se non per problemi di piccole dimensione. Infatti, per calcolare l'inversa di una matrice quadrata $m \times m$ (quale è la $\widetilde{B}$) occorre eseguire un numero di moltiplicazioni approssimativamente proporzionale a m^3, e questo numero diventa praticamente eccessivo per molti problemi che si incontrano nella pratica. Bisogna inoltre tenere conto che nel risolvere un problema di PL bisogna passare, in genere, per molte basi prima di arrivare l'ottimo; bisognerebbe cioè calcolare molte inverse per risolvere un singolo problema. Questa considerazione ci spingono a porci il problema se sia possibile calcolare in maniera più semplice, a partire da B^{-1}, $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$, le analoghe quantità nell'iterazione successiva: $\widetilde{B}^{-1}$, $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ e $\widetilde{B}^{-1}b$. La risposta è affermativa, e per avere un'idea intuitiva di come ciò sia possibile si può notare che questo problema è equivalente a passare in maniera efficiente dalla *forma canonica* rispetto alla matrice di base ammissibile B del problema (6.3.1):

$$\begin{aligned} &\min \quad c^T x \\ &I_m x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \\ &x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

alla *forma canonica* rispetto alla nuova matrice di base ammissibile $\widetilde{B}$:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&I_m x_{\widetilde{B}} + \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} x_{\widetilde{N}} = \widetilde{B}^{-1} b \\
&x_{\widetilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\widetilde{N}} \geq 0_{n-m}.
\end{aligned}
\tag{6.4.12}
$$

in cui compaiono la matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ ed il vettore $\widetilde{B}^{-1}b$.

Per notare meglio le differenze tra le due precedenti forme canoniche, conviene riscrivere la forma canonica (6.4.11) in funzione dei sottovettori $x_{\widetilde{B}}$, $x_{\widetilde{N}}$ (che, ricordiamo, si ottengono dai vettori x_B, x_N scambiando la $k-$esima componente in base con l'$h-$esima componente fuori base).

Indicando, come al solito, con e_i, con $i = 1, \dots, m$, i versori unitari m-dimensionali e con π_i, con $i = 1, \dots, n-m$, le colonne della matrice $B^{-1}N$, la forma canonica (6.4.11) può essere riscritta nella seguente maniera:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_B + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_N = B^{-1} b \\
&x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}.
\end{aligned}
$$

Esplicitando i prodotti matrici-vettori dei vincoli di uguaglianza, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&e_1 x_{j_1} + \ldots + e_k x_{j_k} + \ldots + e_m x_{j_m} + \\
&\qquad\qquad + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \ldots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \ldots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\
&x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}.
\end{aligned}
$$

Scambiando le posizioni dei termini $e_k x_{j_k}$ e $\pi_h x_{j_{m+h}}$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&e_1 x_{j_1} + \ldots + \pi_h x_{j_{m+h}} + \ldots + e_m x_{j_m} + \\
&\qquad\qquad + \pi_1 x_{j_{m+1}} + \ldots + e_k x_{j_k} + \ldots + \pi_{n-m} x_{j_n} = B^{-1} b \\
&x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m},
\end{aligned}
$$

utilizzando i sottovettori $x_{\widetilde{B}}$, $x_{\widetilde{N}}$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c^T x \\
&\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{k-1} \; \pi_h \; e_{k+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix} x_{\widetilde{B}} + \\
&\qquad\qquad + \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{h-1} \; e_k \; \pi_{h+1} & \cdots & \pi_{n-m} \end{pmatrix} x_{\widetilde{N}} = B^{-1} b \\
&x_{\widetilde{B}} \geq 0_m, \quad x_{\widetilde{N}} \geq 0_{n-m}.
\end{aligned}
$$

Da questa formulazione si può ottenere la forma canonica (6.4.12), effettuando un'operazione sui vincoli di uguaglianza che permetta di ottenere un sistema lineare *equivalente* in cui le colonne e_i, con $i = 1, \dots, m$ e $i \neq k$, siano rimaste

immutate e la colonna π_h sia trasformata nel versore e_k. Come è noto premoltiplicando i termini di destra e di sinistra di un sistema di equazioni con un matrice invertibile si ottenere un sistema *equivalente*, ovvero un sistema che ha le stesse soluzioni.
Sulla base delle precedenti considerazioni, introduciamo la seguente matrice $m \times m$, detta *matrice di pivot* che è data da

$$T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -(\pi_h)_2/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{k+1}/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_{m-1}/(\pi_h)_k & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -(\pi_h)_m/(\pi_h)_k & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k - \text{esima colonna} \end{array} \tag{6.4.13}$$

Notiamo che la matrice T è ottenuta dalla matrice identità $m \times m$, sostituendo alla k-esima colonna, una colonna ottenibile a partire dgli elementi della h-esima colonna della matrice $B^{-1}N$. L'elemento $(\pi_h)_k$ viene detto *elemento di pivot*.
Grazie alla sua espressione, la matrice T presenta interessanti proprietà. Alcune di queste sono descritte dal seguente teorema.

Teorema 6.4.5 *Sia T la matrice data dalla (6.4.13). La matrice T è invertibile ed è tale che:*

$$Te_i = e_i, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad i \neq k, \tag{6.4.14}$$
$$T\pi_h = e_k. \tag{6.4.15}$$

Dimostrazione: Il fatto che sia invertibile si può provare osservando che la sua inversa è data da:

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & (\pi_h)_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\pi_h)_m & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ k - \text{esima colonna} \end{array} \tag{6.4.16}$$

Le proprietà (6.4.14) e (6.4.15), possono essere provate per verifica diretta. □

Il prossimo teorema mostra che, attraverso la matrice T, si possono calcolare direttamente il vettore $\widetilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ senza utilizzare (e quindi senza costruire e memorizzare) la matrice $\widetilde{B}^{-1}$.

Teorema 6.4.6 *Sia T la matrice data dalla (6.4.13). Allora si ha:*

$$\begin{aligned} &\widetilde{B}^{-1}b = T(B^{-1}b) \\ &\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} = T(\pi_1, \dots, \pi_{h-1}, e_k, \pi_{h+1}, \dots, \pi_{n-m}). \end{aligned}$$

Omettiamo per brevità la dimostrazione di questo teorema.

Una conseguenza immediata del precedente teorema e della proprietà (6.4.15) è il seguente corollario.

Corollario 6.4.10 *Sia T la matrice data dalla (6.4.13). Allora si ha:*

$$\Big(e_k \ \mid \ \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} \ \mid \ \widetilde{B}^{-1}b\Big) = T\Big(\pi_h \ \mid \ \pi_1 \ \cdots \ \pi_{h-1}\ e_k\ \pi_{h+1} \ \cdots \ \pi_{n-m} \ \mid \ B^{-1}b\Big).$$

Il precedente corollario e la particolare struttura della matrice T mostrano che il vettore $\widetilde{B}^{-1}b$ e la matrice $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ possono essere ottenute effettuando alcune semplici operazioni sulle righe della matrice:

$$M = \Big(\pi_h \ \mid \ \pi_1 \ \cdots \ \pi_{h-1}\ e_k\ \pi_{h+1} \ \cdots \ \pi_{n-m} \ \mid \ B^{-1}b\Big).$$

Infatti si verifica facilmente che l'applicazione della matrice T equivale al seguente procedimento: si parte dalla matrice M e si effettua la seguente *operazione di* *pivot*[1] sull'elemento $(\pi_h)_k$:

(a) si divide la riga $k-$esima di M per $(\pi_h)_k$;

(b) si somma a ciascuna riga $i-$esima di M (con $i \neq k$), la riga $k-$esima ottenuta al precedente punto *(a)* moltiplicata per l'elemento $-(\pi_h)_i$

Al termine di questa operazione si ottiene la matrice

$$\left(e_k \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}\widetilde{N} \;\mid\; \widetilde{B}^{-1}b\right).$$

[1]Lo studente riconoscera in questa operazione la procedura base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per la soluzione di sistemi di equazioni lineari