6.4.5 Struttura dell'algoritmo ed esempi

Come abbiamo già ampiamente osservato, la Fase II del metodo del simplesso, a partire da una soluzione di base ammissibile, iterativamente effettua le seguenti operazioni:

1. verifica se la soluzione di base ammissibile corrente è una soluzione ottima e in caso affermativo si arresta;

2. verifica se il problema è illimitato (inferiormente) e in caso affermativo si arresta;

3. se nessuna delle precedenti verifiche ha avuto esito positivo, costruisce una nuova base ammissibile.

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito ed analizzato in dettaglio questi tre elementi costitutivi della Fase II del metodo del simplesso; infatti, nel paragrafo 6.4.1 è stato definito un criterio sufficiente per verificare l'ottimalità di una soluzione di base ammissibile; nel paragrafo 6.4.2 è stato definito un criterio sufficiente per verificare se un problema è illimitato inferiormente; infine, nel paragrafo 6.4.3 abbiamo esaminato come costruire una nuova base ammissibile e una nuova forma canonica. Ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto non sono verificati, il metodo genera una nuova soluzione di base ammissibile alla quale corrisponde, per come è stata costruita, una decrescita (non crescita) del valore della funzione obiettivo.
Nel seguito riportiamo uno schema algoritmico di una iterazione della Fase II del metodo. Supponiamo quindi di avere un problema di Programmazione Lineare in forma standard e in forma canonica rispetto ad una base B

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B \geq 0_m, \quad x_N \geq 0_{n-m}. \end{aligned}$$

Come già in precedenza, indichiamo con a_{j_i}, $i = 1, \ldots, m$ le colonne della matrice B, e con $a_{j_{m+i}}$ le colonne della matrice N, ovvero

$$B = \begin{pmatrix} a_{j_1} & \cdots & a_{j_m} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a_{j_{m+1}} & \cdots & a_{j_{n-m}} \end{pmatrix}.$$

Fase II del metodo del simplesso

Passo 1: *Calcolo del vettore dei costi ridotti*

- Calcolare il vettore $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$

Passo 2: *Verifica del criterio di ottimalità*

- se per ogni $i \in \{1, \dots, n-m\}$, risulta $\gamma_i \geq 0$, allora la soluzione corrente
  $\bar{x}_B = B^{-1}b, \quad \bar{x}_N = 0_{n-m}$ è ottima. – STOP

Passo 3: *Verifica del criterio di illimitatezza*

- se per qualche $i \in \{1, \dots, n-m\}$, tale che $\gamma_i < 0$ risulta $\pi_i \leq 0$ allora il problema è illimitato inferiormente. – STOP

Passo 4: *Costruzione di una nuova base ammissibile*

- selezionare un indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$;
  l'h-esima variabile fuori base, ovvero $x_{j_{m+h}}$, entra in base.
- calcolare l'indice k attraverso il criterio del rapporto minimo
  $$\frac{(B^{-1}b)_k}{(\pi_h)_k} = \min_{\substack{i=1,\dots,m \\ (\pi_h)_i > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(\pi_h)_i} \right\};$$
  la k-esima variabile in base, ovvero x_{j_k}, esce dalla base.
- costruire le matrici $\widetilde{B}$ e $\widetilde{N}$ a partire da B e N scambiando fra loro l'h-esima colonna di N, ovvero $a_{j_{m+h}}$ con la k-esima colonna di B, ovvero a_{j_k}.
- costruire i nuovi vettori $x_{\tilde{B}}$, $x_{\tilde{N}}$, $c_{\tilde{B}}$ e $c_{\tilde{N}}$.

Passo 5: *Costruzione di una nuova forma canonica*

- calcolare le grandezze rilevanti, relative alla nuova base $\widetilde{B}$, ovvero $\widetilde{B}^{-1}b$ e $\widetilde{B}^{-1}\widetilde{N}$ attraverso un'operazione di *pivot*, e definire la nuova forma canonica rispetto alla nuova base $\widetilde{B}$ ed effettuare una nuova iterazione.

Esempio 6.4.11 *Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{array}$$

Il problema è in forma standard ed inoltre si dispone della base $B_0 = I$ data dalle colonne 4, 5, 6, quindi il problema è in forma canonica rispetto alle variabili x_4, x_5, x_6, ovvero:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B_0^{-1} N_0$$

$$x_{B_0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \min \;\; (1 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 0

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_0^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (4 \;\; 3 \;\; -3) = (-3 \;\; -1 \;\; 4)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_1 \leq 0$, o $\pi_2 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo

minore ovvero $h = 1$ in quanto $\gamma_1 = -3 < -1 = \gamma_2$; quindi entra in base la prima variabile fuori base, ovvero x_1.
Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ (\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{(B_0^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{(B_0^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = 1$$

si determina $k = 2$ e quindi la seconda variabile in base esce dalla base, ovvero x_5.

Nuova base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\, \pi_1 \quad | \quad e_2 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad | \quad B_0^{-1}b \,)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ \mathbf{2} & | & 1 & -1 & -5 & | & 2 \\ 1 & | & 0 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_1)_2 = 2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & -1/2 & 5/2 & 11/2 & | & 2 \\ 1 & | & 1/2 & -1/2 & -5/2 & | & 1 \\ 0 & | & -1/2 & 5/2 & 3/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(\, e_2 \quad | \quad B_1^{-1}N_1 \quad | \quad B_1^{-1}b \,).$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{array}{l} \min \;\; (1 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1 \;\; 2 \;\; 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 1

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_1^T = (1 \;\; 2 \;\; 1) - (1 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \;\; 2 \;\; 1) - (-1/2 \;\; 9/2 \;\; 9/2) = (3/2 \;\; -5/2 \;\; -7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché esistono componenti di γ negative la verifica è fallita.

Verifica del criterio di illimitatezza:
Poiché non risulta $\pi_2 \leq 0$, o $\pi_3 \leq 0$ la verifica è fallita.

Costruzione nuova base ammissibile:
Variabile entrante: si sceglie l'indice h corrispondente al costo ridotto negativo minore ovvero $h = 3$ in quanto $\gamma_3 = -7/2 < -5/2 = \gamma_2$; quindi entra in base la terza variabile fuori base, ovvero x_3.
Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,\dots,3 \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_1^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{(B_1^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 0 \qquad (6.4.17)$$

si determina $k = 3$ e quindi la terza variabile in base esce dalla base, ovvero x_6.

Nuova base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Costruzione nuova forma canonica:
si effettua un'operazione di pivot sulla matrice

$$(\, \pi_3 \;\; | \;\; \pi_1 \;\; \pi_2 \;\; e_3 \;\; | \;\; B_1^{-1}b \,)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 11/2 & | & -1/2 & 5/2 & 0 & | & 2 \\ -5/2 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & | & 1 \\ \mathbf{3/2} & | & -1/2 & 5/2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Effettuando il pivot sull'elemento $(\pi_h)_k = (\pi_3)_3 = 3/2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & | & 4/3 & -20/3 & -11/3 & | & 2 \\ 0 & | & -1/3 & 11/3 & 5/3 & | & 1 \\ 1 & | & -1/3 & 5/3 & 2/3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(e_3 \quad | \quad B_2^{-1}N_2 \quad | \quad B_2^{-1}b) .$$

Quindi la nuova forma canonica è

$$\begin{array}{l}
\min \ (1 \ \ 1 \ \ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1 \ \ 2 \ \ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x \geq 0
\end{array}$$

Iterazione 2

Calcolo dei costi ridotti:

$$\gamma_2^T = (1 \ \ 2 \ \ 1) - (1 \ \ 1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \ \ 2 \ \ 1) - (2/3 \ \ -4/3 \ \ -4/3) =$$

$$= (1/3 \ \ 10/3 \ \ 7/2)$$

Verifica del criterio di ottimalità:
Poiché risulta $\gamma_2 > 0$ il criterio di ottimalità è soddisfatto e quindi la soluzione

$$\bar{x}^\star = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$$

è soluzione ottima del problema ed è l'unica soluzione ottima poichè il vettore dei costi ridotti ha tutte le componenti positive. □

Osservazione 6.4.12 Nella prima iterazione del precedente Esempio 6.4.11, dal criterio del rapporto minimo (6.4.17) si è ottenuto il valore zero ($\bar{\rho} = 0$). In questo caso vale quanto discusso nella Osservazione 6.4.8, ovvero che $x_{B_1} = (2, 1, 0)^T$ è una soluzione base ammissible *degenere* e che la successiva soluzione base ammissibile rimane invariata pur essendo stato effettuato un cambio di base; ed infatti si ha $x_{B_2} = (2, 1, 0)^T$. In questa situazione si parla di *iterazione degenere*.

Esempio 6.4.13 *Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso e utilizzando la costruzione esplicita della matrice di pivot T, il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Si può applicare la Fase II del metodo del simplesso in quanto il problema è in forma canonica. Infatti si può scrivere:

$$\begin{array}{l} \min\ (3\ 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x \geq 0. \end{array}$$

La base iniziale è $B_0 = I$; $x_{B_0} = (x_1 \ \ x_2)^T$ e $x_{N_0} = (x_3 \ \ x_4)^T$.

Iterazione 0.

Calcolo dei costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Verifica del criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$ e quindi il criterio è fallito.

Verifica criterioi illimitatezza.

La colonna $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \not\leq 0$; il criterio è fallito.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo -3, e quindi si sceglie $h = 2$ che corrisponde alla variabile x_4 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_2)_i > 0}} \left\{ \frac{(B_0)^{-1}b)_i}{(\pi_2)_i} \right\} = \frac{5}{2}$$

che corrisponde alla variabile x_1 e $k = 1$.

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad c_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi

$$B_1^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1

Calcolo costi ridotti.

Si calcolano i coefficienti di costo ridotto

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Verifica criterio di ottimalità.

Risulta $\gamma_1 \not\geq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Verifica criterio di illimitatezza.

Risulta $\pi_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$ e quindi la verifica fallisce.

Costruzione nuova base ammissibile.

Variabile entrante: c'è un unico costo ridotto negativo $-3/2$, e quindi $h = 1$ che corrisponde alla variabile x_3 che entra in base.

Variabile uscente: attraverso il criterio del rapporto minimo

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{((B_1)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \frac{((B_1)^{-1}b)_2}{(\pi_1)_2} = \frac{11}{3}$$

che quindi corrisponde a scegliere $k = 2$ e quindi la variabile x_2 esce dalla base. Quindi

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad c_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_{N_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrici di base e fuori base:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola la matrice
$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
Si ottiene
$$(B_2)^{-1}N_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$
e
$$(B_2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 2
Calcolo costi ridotti.
Si ha
$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Verifica criterio di ottimalità.
Poichè i costi ridotti sono tutti positivi, la soluzione trovata è ottima.

Si ha quindi
$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_3^* = 11/3 \;\; x_4^* = 13/3$$
con valore della funzione obiettivo $z(x^*) = 8$. La base ottima è $B^* = B^2$ e la soluzione trovata è unica poiché i costi ridotti sono strettamente positivi. □

6.4.6 Convergenza del metodo del simplesso

Per concludere l'analisi della Fase II del metodo del simplesso, vogliamo ora mostrare che, sotto opportune ipotesi, il numero di iterazioni della Fase II è finito, ovvero che, in un numero finito di iterazioni, l'algoritmo descritto nei paragrafi precedenti *converge* alla soluzione ottima del problema (6.3.1) o conclude che il problema è illimitato inferiormente. A tale scopo notiamo che, nelle ipotesi che abbiamo finora adottato (il problema (6.3.1) è ammissibile e il rango della matrice A è m) sappiamo che il numero di basi ammissibili per il problema è finito (vedi il Teorema (6.2.3)) e maggiore o uguale a 1 (perchè il poliedro del problema in forma standard ammette almeno un vertice, essendo non vuoto e non contenendo rette). Il principale risultato sulla convergenza della Fase II del metodo del simplesso è il seguente.

Teorema 6.4.7 *Se nell'applicazione della Fase II del metodo del simplesso non viene mai generata due volte la stessa base (cioè se nessuna base si ripete nella sequenza delle basi prodotte dal metodo), allora esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza prodotta dal metodo soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza.*

Dimostrazione: Come abbiamo più volte osservato, ad ogni iterazione della Fase II, se i criteri di arresto e di illimitatezza non sono verificati, il metodo è in grado di generare una nuova base ammissibile differente da quella corrente. D'altra parte, siccome le basi sono in numero finito, e abbiamo fatto l'ipotesi che non ci siano ripetizioni, dopo un numero finito di passi (pari al più al numero di basi ammissibili distinte del problema) non potranno più essere generate basi diverse da tutte le precedenti. Dunque, necessariamente, o il criterio di ottimalià o quello di illimitatezza devono essere soddisfatti. □

È appena il caso di osservare che, nelle ipotesi di questo teorema, la Fase II del metodo del simplesso termina una volta raggiunta la base B_t con il soddisfacimento del criterio di ottimalità o del criterio di illimitatezza. Un caso semplice (poco frequente nelle applicazioni reali) in cui si può garantire che non ci sono ripetizioni di basi è quello in cui tutte le soluzioni di base siano *non degeneri*. In questo caso infatti, il Corollario 6.4.9 ci assicura che ad ogni cambio di base corrisponde una *diminuzione* del valore della funzione obiettivo. È allora chiaro che non ci possono essere ripetizioni di base, perché questo implicherebbe che in qualche iterazione viene generata una nuova base il cui valore è *maggiore* del valore della base precedente. Questa osservazione ci permette di enunciare, senza bisogno di ulteriori dimostrazioni, il seguente corollario.

Corollario 6.4.14 *Se ogni soluzione di base ammissibile del problema (6.3.1) è non degenere allora, in un numero finito di passi, la Fase II del metodo del simplesso converge alla soluzione ottima o conclude che il problema è illimitato inferiormente.*

Se il problema (6.3.1) ammette SBA degeneri, è possibile che la Fase II del metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $\{B_1, \ldots, B_q\}$ $(q > 1)$ con $B_1 = B_q$. Ovviamente affinché ciò sia possibile è evidente che (visto che il valore della funzione obiettivo ad ogni cambio di base non cresce) deve risultare che il valore della funzione obiettivo in ogni base $\{B_1, \ldots, B_q\}$ è costante. A sua volta, ciò è possibile solamente se ad ogni iterazione $\bar{\rho} = 0$. Questo vuol quindi dire che, nella situazione appena descritta, le basi $\{B_1, \ldots, B_q\}$ corrispondono tutte allo stesso vertice (degenere). In tale situazione, se usiamo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererà la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Tale situazione viene detta di *ciclaggio*, ed è illustrata dal seguente esempio, dovuto a Beale.

Esempio 6.4.15 Si consideri il problema

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & & & \frac{3}{4}x_4 & +20x_5, & -\frac{1}{2}x_6 & +6x_7 & \\
& x_1 & & +\frac{1}{4}x_4 & -8x_5 & -x_6 & +9x_7 & = 0 \\
& & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & -12x_5 & -\frac{1}{2}x_6 & +3x_7 & = 0 \\
& & \quad x_3 & & & +x_6 & & = 1 \\
& & & & & & x & \geq 0
\end{array}
\tag{6.4.18}
$$

Indicando con a_i, $i = 1, \ldots, 7$, le colonne della matrice dei vincoli di uguaglianza del problema (6.4.18), la base ottima di questo problema è (a_1, a_4, a_6) (si lascia al lettore la verifica del test di ottimalità). Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplesso a partire dalla base ammissibile ovvia (a_1, a_2, a_3). Si tratta ovviamente di una base degenere in quanto $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Supponiamo ora di applicare la Fase II del metodo del simplesso scegliendo ad ogni iterazione l'indice h della variabile entrante per il quale il coefficiente di costo ridotto è minimo e l'indice k della variabile uscente il più piccolo tra quelli possibili (ad ogni iterazione ci sono una o due scelte possibili per k). Il lettore può verificare che con queste scelte (molto naturali, e coerenti con le scelte usate in classe per la risoluzione degli esercizi) viene generata la seguente successione di basi

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, a_2, a_3), & (a_4, a_2, a_3), & (a_4, a_5, a_3), & \\
(a_6, a_5, a_3), & (a_6, a_7, a_3), & (a_1, a_7, a_3), & (a_1, a_2, a_3).
\end{array}
$$

Si tratta di una serie di basi degeneri tutte corrispondenti allo stesso vertice. La cosa importante da notare è che l'ultima base indicata coincide con la prima. Quindi è chiaro che (se non si cambiano i criteri di scelta di h e k) da questo punto in poi, la Fase II non farà altro che ripetere indefinitivamente la stessa successione di basi senza mai raggiungere la base ottima.

Quindi, nel caso (più frequente nelle applicazioni) in cui esistano SBA degeneri, la Fase II del Metodo del Simplesso, così come descritta prima, può non convergere, ovvero può produrre una sequenza infinita di basi ammissibili senza mai verificare uno dei due criteri di arresto.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di h e k. È possibile definire opportune *regole anti ciclaggio* per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplesso converge in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perchè eccessivamente onerose e il metodo del simplesso viene applicato esattamente così come lo abbiamo descritto. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplesso è però argomento molto complesso e non può essere qui trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti ciclaggio, la regola di Bland.

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

Vale il seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 6.4.8 *Supponiamo di applicare la Fase II del metodo del simplesso con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi, per il Teorema 6.4.7, esiste un indice $t \geq 1$ tale che la base B_t nella sequenza generata dal metodo del simplesso (Fase II) soddisfa il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Il lettore può verificare che se si applica la regola di Bland nella soluzione del problema di Beal considerato sopra, viene in effetti trovata la base ottima in un numero finito di passi.