6.4 IL METODO DEL SIMPLESSO

In questo paragrafo sono riportati alcuni esercizi risolti sul metodo del simplesso. Alcuni sono risolti utilizzando la procedura di pivot per determinare, ad ogni iterazione, la nuova forma canonica; in altri tale forma canonica è determinata con l'uso esplicito della matrice di pivot T. Ovviamente l'uso dell'una o dell'altra procedura è del tutto equivalente.

Esercizio 6.4.1 *Risolvere applicando la Fase II del metodo del simplesso il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Si può applicare la Fase II del metodo del simplesso perché il problema è in forma canonica rispetto alle variabili $x_4,\ x_5$, ovvero può essere scritto

$$\begin{aligned} \min \quad & (2\ 0)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + (-2\ \ 4\ -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

La base iniziale è $B^0 = I$ e risulta $x_{B^0} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $x_{N^0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = c_{N^0} - (N^0)^T c_{B^0} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Per $i = 1, 2, 3$ risulta $\pi_i > 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. Si sceglie la variabile corrispondente al costo ridotto minore, cioè x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile uscente. Si sceglie $\min\limits_{\substack{i \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \frac{3}{2}$ che corrisponde alla variabile x_5 e $k = 2$.

I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_{N^1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_3	π_1	π_2	e_2	$(B^0)^{-1}b$
2	1	4	0	6
2	2	1	1	3

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_3)_2 = 2$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$			$(B^1)^{-1}b$
0	-1	3	-1	3
1	1	1/2	1/2	3/2

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{array}{ll} \min & (2\ \ -2)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + (-2\ 4\ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^1 = c_{N^1} - \left[\left(B^1\right)^{-1} N^1\right]^T c_{B^1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_2 > 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. C'è un solo costo ridotto negativo, la variabile entrante è x_2 e $h = 2$.
Scelta della variabile uscente. Si sceglie $\min\limits_{\substack{i \\ (\pi_2)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_2)_i} \right\} = 1$ che corrisponde alla variabile x_4 e $k = 1$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_{N^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c_{N^2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^2)^{-1}N^2$ e $(B^2)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_2	π_1	e_1	π_3	$(B^1)^{-1}b$
3	-1	1	-1	3
1/2	1	0	1/2	3/2

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_2)_1 = 3$, si ottiene:

e_1	$(B^2)^{-1}N^2$			$(B^2)^{-1}b$
1	-1/3	1/3	-1/3	1
0	7/6	-1/6	2/3	1

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^2 è:

$$\begin{aligned} \min \quad & (4 \ -2)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (-2 \ 2 \ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 7/6 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 2.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^2 = c_{N^2} - [(B^2)^{-1}N^2]^T c_{B^2} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^2 > 0$. La soluzione è ottima e vale:

$$x_1^* = x_4^* = x_5^* = 0, \;\; x_2^* = x_3^* = 1;$$

il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a 2 e la base ottima B^* è B^2. La soluzione è unica poiché i coefficienti di costo ridotto sono strettamente positivi.
$\square$

Esercizio 6.4.2 *Risolvere con il metodo del simplesso il seguente problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Innanzitutto poniamo il problema in forma standard.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Il problema è in forma canonica, infatti si può scrivere:

$$\min\, (0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

e quindi possiamo applicare direttamente la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. $(\gamma^0)^T = c_{N^0}^T = (1\ \ 1\ -1)$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.

Verifica illimitatezza. La colonna $\pi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. C'è un unico costo ridotto negativo -1, che corrisponde alla variabile x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie

$$\min_{\substack{i \\ (\pi_3)i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \frac{((B^0)^{-1}b)_2}{(\pi_3)_2} = \frac{((B^0)^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 10$$

cioè $k = 2$ o $k = 3$. Si può scegliere quindi indifferentemente x_5 o x_6. Si sceglie x_5 ($k = 2$).
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e le corrispondenti matrice di base e fuori base:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

o effettuando un'operazione di pivot si ottiene la nuova forma canonica.
Iterazione 1.
Calcolo costi ridotti. Si ha $\gamma^1 = (4 \;\; -1 \;\; 1)^T$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$ e quindi il criterio di ottimalità non è soddisfatto.

Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$, e quindi è soddisfatto il criterio sufficiente di illimitatezza. Il problema dato è quindi illimitato inferiormente. □

Esercizio 6.4.3 *Risolvere, utilizzando il metodo del simplesso, il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Utilizzare esplicitamente la matrice T per il calcolo della nuova forma canonica ad ogni iterazione.

Questo problema è stato già risolto (si veda l'Esercizio 7.4.11 degli *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*, dove il calcolo della nuova forma canonica era stato realizzato attraverso l'operazione di pivot). Ora si richiede di risolverlo facendo esplicito uso della matrice T.
Il problema è già in forma canonica:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

e quindi possiamo applicare direttamente la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$ e quindi si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \not\leq 0 \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\leq 0$$

quindi si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta variabile <u>entrante</u>. Il costo ridotto negativo -3 corrisponde alla variabile x_1, cioè $h = 1$.

Scelta variabile <u>uscente</u>.

$$\min_{\substack{i=1,2,3\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

Poichè il minimo è raggiunto per più di un indice, la soluzione trovata sarà degenere. Scegliamo di far uscire la variabile x_5 corrispondente a $k = 2$.
Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si costruisce la nuova forma canonica utilizzando la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora calcolare la matrice $(B^1)^{-1}N^1$ e il vettor $(B^1)^{-1}b$. Si ottiene:

$$(B^1)^{-1}N^1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad (B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica è quindi:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1) \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Si osservi che la soluzione di base ottenuta ha una componente nulla, cioè è degenere.

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \not\leq 0, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \not\leq 0$$

si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta variabile entrante. C'è un unico costo ridotto negativo corrispondente all'indice $h = 3$ cioè alla variabile x_3.
Scelta variabile uscente. Si ha

$$\min_{\substack{i=1,2,3 \\ (\pi_3)_i>0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \left\{ \frac{2}{11/2}, \frac{0}{3/2} \right\} = \frac{((B^1)^{-1}b)_3}{(\pi_3)_3} = 0$$

Esce la variabile x_6 corrispondente a $k = 3$.
Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_{N_2} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si costruisce la nuova forma canonica utilizzando la matrice T^2

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare le matrici $(B^2)^{-1}N^2$, $(B^2)^{-1}b$. Si ottiene:

$$(B^2)^{-1}N^2 = \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad (B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica è:

$$\begin{array}{l} \min(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -20/3 & -11/3 \\ -1/3 & 11/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Iterazione 2.

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità.

I costi ridotti sono tutti positivi, quindi la soluzione trovata è ottima. La soluzione ottima è

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_N^* = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con valore ottimo della funzione obiettivo pari a 3. La soluzione trovata è unica ed è degenere. □