Esercizio 6.4.4 *Risolvere utilizzando il metodo del simplesso il seguente problema di PL:*

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Il problema non è in forma canonica; si deve quindi applicare la Fase I. Consideriamo quindi il problema ausiliario:

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \alpha_1 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + \alpha_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 + \alpha_3 = 5 \\ & x \geq 0, \qquad \alpha \geq 0. \end{array}$$

Il problema ausiliario naturalmente è in forma canonica:

$$\begin{array}{l} \min\ (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{array}$$

Si risolve il problema ausiliario con la Fase II del metodo del simplesso.
$B^0 = I$, $x_{B^0} = \alpha$, $x_{N^0} = x$.

Iterazione 0.

Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = c_{N^0} - (N^0)^T c_{B^0} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.

Scelta della variabile <u>entrante</u>: il minimo costo ridotto è -6 che corrisponde alle variabili x_1, x_3; si sceglie $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si ha:

$$\min_{\substack{i=1,2,3\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{1} \right\} = 1,$$

con $k = 2$ a cui corrisponde la variabile α_2.
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è data da:

π_1	e_2	π_2	π_3	$(B^0)^{-1}b$
2	0	1	2	4
3	1	3	1	3
1	0	-1	3	5

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_1)_2 = 3$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$			$(B^1)^{-1}b$
0	-2/3	-1	4/3	2
1	1/3	1	1/3	1
0	-1/3	-2	8/3	4

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{aligned} &\min\ (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & -2 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &x \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^1 = c_{N^1} - ((B^1)^{-1}N^1)^T c_{B^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & 4/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & -2 & 8/3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>. C'è un'unico costo ridotto negativo che corrisponde alla variabile x_3 ed $h = 3$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si sceglie $\min\limits_{\substack{i \\ (\pi_3)_i > 0}} \left\{ \dfrac{((B^1)^{-1}b)_i}{(\pi_3)_i} \right\} = \dfrac{3}{2}$ che corrisponde alla variabile α_1 e α_3. Si sceglie α_1 e $k = 1$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad x_{N^2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^2)^{-1}N^2$ e $(B^2)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è data da:

π_3	π_1	π_2	e_1	$(B^1)^{-1}b$
4/3	-2/3	-1	1	2
1/3	1/3	1	0	1
8/3	-1/3	-2	0	4

Con operazione di pivot si ottiene

e_1	$(B^2)^{-1}N^2$			$(B^2)^{-1}b$
1	-1/2	-3/4	3/4	3/2
0	1/2	5/4	-1/4	1/2
0	1	0	-2	0

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^2 è:

$$
\begin{aligned}
&\min\ (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 5/4 & -1/4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&x \geq 0 \quad \alpha \geq 0
\end{aligned}
$$

Iterazione 2.

Calcolo dei costi ridotti. $(\gamma^2)^T = (1\ 0\ 1) - (0\ 0\ 1) = (0\ 0\ 3)$.

Verifica ottimalità. I costi ridotti sono non negativi, quindi la soluzione trovata è ottima. Si tratta di una soluzione degenere.

Verifica ammissibilità problema originario.

Il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario $z(\alpha^*)$ è nullo, quindi il problema di PL è ammissibile.

Costruzione della base del problema originario.

Le variabili α_1, α_2 sono uscite dalla base e si possono semplicemente eliminare. Si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\min\ (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}\\
&\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&x \geq 0 \quad \alpha_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

La variabile α_3 è invece ancora in base, ma l'elemento $(\pi_3)_2 = 0$. (La variabile α_3 è cioè identicamente nulla). Il vincolo corrispondente è quindi ridondante e si può eliminare. Si ottiene la forma canonica del problema originario rispetto alla base $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ottenuta da B^2 eliminando la riga e la colonna relative ad α_3):

$$
\begin{aligned}
&\min\ (1\ 4)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + x_2\\
&\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\\
&x \geq 0.
\end{aligned}
$$

INIZIO FASE II

Indichiamo la matrice di base iniziale e la matrice fuori base con:

$$
B^0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad N^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Iterazione 0.
Calcolo costi ridotti. $\gamma^0 = -13/4$
Verifica ottimalità. $\gamma^0 < 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. Risulta $\pi_1 \not\leq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. Entra in base la variabile x_2 e $h = 1$.
Scelta della variabile uscente. Esce dalla base la variabile x_1 e $k = 2$.
I nuovi vettori delle variabili di base e fuori base sono:

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad x_{N^1} = x_1$$

a cui corrispondono le nuove matrici:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Costruzione forma canonica.
Calcolo $(B^1)^{-1}N^1$ e $(B^1)^{-1}b$ con operazione di pivot. La matrice di pivot è:

π_1	e_2	$(B^0)^{-1}b$
-3/4	0	3/2
5/4	1	1/2

Con l'operazione di pivot sull'elemento $(\pi_1)_2 = 5/4$, si ottiene:

e_2	$(B^1)^{-1}N^1$	$(B^1)^{-1}b$
0	3/5	9/5
1	4/5	2/5

Quindi la nuova forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{array}{l} \min\ (1\ 1)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + 4x_1 \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \\ x \geq 0. \end{array}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. $\gamma^1 = 13/5$
Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 > 0$; la soluzione trovata è ottima e unica e vale:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2/5, \quad x_3^* = 9/5$$

con valore ottimo della funzione obiettivo pari a 11/5. La base ottima B è B^1. □

Esercizio 6.4.5 *Risolvere, utilizzando il metodo del simplesso, il seguente problema di Programmazione Lineare:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Innanzitutto scriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Il problema non è in forma canonica e quindi di deve applicare la Fase I.

Consideriamo quindi il problema ausiliario:

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + \alpha_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + \alpha_2 = 2 \\ & x \geq 0, \quad \alpha \geq 0. \end{array}$$

Il problema ausiliario è in forma canonica

$$\min\ (1\ 1)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (0\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad \alpha \geq 0$$

Si risolve il problema ausiliario con la Fase II del metodo del simplesso.
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile <u>entrante</u>: il minimo costo ridotto è -2 che corrisponde alla variabile x_1 e $h = 1$.
Scelta della variabile <u>uscente</u>. Si ha:

$$\min_{\substack{i=1,2\\(\pi_1)_i>0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 2$$

Poiché il minimo è raggiunto per più di un indice, la soluzione sarà degenere. Si sceglie di far uscire la variabile α_1 corrispondente a $k = 1$.
Quindi

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad c_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la nuova forma canonica attraverso la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi si ha:

$$(B^1)^{-1}N^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ed il problema in forma canonica rispetto alla base B^1 è:

$$\begin{aligned}
&\min\ (0\ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \not\geq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. C'è un solo costo ridotto negativo $(\gamma^1)_2 = -3$ che corrisponde alla variabile x_2 e $h = 2$.
Scelta della variabile uscente.

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_2)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^1)^{-1}b)_i}{\pi_{i2}} \right\} = \frac{0}{3} = 0$$

Si ottiene un valore nullo; questo corrisponde, come previsto, ad una soluzione degenere. La variabile uscente è α_2 e $k = 2$.
Quindi

$$x_{B^2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_{N^2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad c_{B^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{N^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può calcolare la nuova forma canonica attraverso l'uso della matrice

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Iterazione 2.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha $(\gamma^2)^T = (1\ 1\ 0\ 0)$.
Verifica ottimalità. Il vettore dei costi ridotti è non negativo, quindi la soluzione trovata è ottima. Calcoliamo

$$(B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione ottima vale quindi

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0 \quad \alpha_1^* = \alpha_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$$

Si tratta di una soluzione degenere.

Verifica ammissibilità problema originario.
Il valore della funzione obiettivo del problema ausiliario $z(\alpha^*)$ è nullo, quindi il problema di originario è ammissibile.
Costruzione della base del problema originario.
Le variabili ausiliarie sono tutte fuori base e quindi una base ammissibile per il problema iniziale è B^2, e la soluzione di base ammissibile corrispondente si ottiene eliminando le variabili ausiliarie dalla soluzione ottima. Si applica quindi la Fase II al problema

$$\begin{array}{l} \min\ (1\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-1\ 0)\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Risulta

$$B^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

INIZIO FASE II
Iterazione 0.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^0 \not\geq 0$; si prosegue.
Verifica illimitatezza. La colonna $\pi_1 \not\leq 0$; si prosegue.
Costruzione nuova base ammissibile.
Scelta della variabile entrante. C'è un solo costo ridotto negativo $-\frac{2}{3}$ che corrisponde alla variabile x_3 e $h = 1$.
Scelta della variabile uscente. Risulta $\pi_1 = (1/3 \quad -2/3)^T$ e si ha

$$\min_{\substack{i=1,2 \\ (\pi_1)_i > 0}} \left\{ \frac{((B^0)^{-1}b)_i}{(\pi_1)_i} \right\} = \frac{((B^0)^{-1}b)_1}{(\pi_1)_1} = 6$$

che corrisponde a alla variabile x_1 e $k = 1$.
Quindi si ha

$$x_{B^1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x_{N^1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad c_{B^1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{N^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le nuove matrici di base e fuori base sono

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La nuova forma canonica si può ottenere attraverso la matrice

$$T^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1.
Calcolo dei costi ridotti. Si ha

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica ottimalità. Risulta $\gamma^1 \geq 0$. Quindi la soluzione trovata è ottima. Calcoliamo

$$(B^1)^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix};$$

la soluzione ottima vale quindi:

$$x_1^* = x_4^* = 0, \quad x_2^* = 4, \quad x_3^* = 6$$

con valore della funzione obiettivo pari a -2. La base ottima B^* uguale a B^1. □

Esercizio 6.4.6 *Sia dato il problema di Programmazioe Lineare definito da*

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A è $m \times n$. Fornendo una breve giustificazione o un controesempio, stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa: "se A ha rango minore di m, al termine della Fase I del metodo del simplesso alcune variabili artificiali devono essere necessariamente variabili di base".

Vero. Poiché il problema artificiale usato nella Fase I del metodo del simplesso ammette sempre una soluzione ottima, esiste sempre una soluzione di base ammissibile. Se A ha rango minore di m, non esiste una sottomatrice B, $m \times m$, di A non singolare. Quindi la base ammissibile individuata alla fine della Fase I del metodo del simplesso, deve necessariamente contenere almeno una colonna relativa ad una variabile ausiliaria e la SBA corrispondente contiene almeno una variabile ausiliaria. □