Esame di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

11 ottobre 2018

Compito A

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo VERO o sul rettangolo FALSO sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dati y e z in $\mathbb{R}^n$, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   (a) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda y + (1-\lambda)z, \quad \lambda \in [0,1]\}$ è un poliedro. (**V**)

   (b) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + \lambda z, \quad \lambda \geq 0\}$ è una retta.

   (c) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda y + (1-\lambda)z, \quad \lambda \geq 0\}$ è un insieme convesso. (**V**)

   (d) Se P è un poliedro ed $y \in P$, allora l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = y + \lambda z, \quad \lambda \geq 0\}$ deve appartenere a P.

2. Dato l'insieme
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$
dove A è una matrice $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   (a) H è un poliedro se e solo se A ha rango massimo.

   (b) Se H è non vuoto allora ammette sicuramente vertici.

   (c) Se $m < n$, allora H non può ammettere vertici. (**V**)

   (d) Se $m = n$ e la matrice A è non singolare, allora H ammette sicuramente uno e un solo vertice. (**V**)

3. Sia dato un problema di Programmazione Lineare Intera e sia P una sua formulazione lineare. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   (a) $P \cap \mathbf{Z}$ è l'insieme ammissibile del problema di Programmazione Lineare Intera. (**V**)

   (b) La formulazione P è univocamente determinata.

   (c) P è un politopo.

   (d) P è costituito da un numero finito di punti.

4. Dato il poliedro definito dal sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 + \beta x_3 + x_4 &\geq 2 \\ 2x_2 + x_4 &\geq 3 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Esistono valori di β per cui il punto $(0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è un vertice del poliedro. (**V**)

   (b) L'origine è un vertice del poliedro.

   (c) Il punto $(1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$ è un vertice del poliedro per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$. (**V**)

   (d) Il punto $(2,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è un vertice del poliedro per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$.

5. Sia dato un problema di Programmazione Lineare.

   (a) Il problema artificiale che si risolve nella fase I del metodo del simplesso ammette sempre soluzione ottima con valore della funzione obiettivo (del problema artificiale) nullo.

   (b) Se alla fine della fase I sono rimaste alcune variabili in base, allora il problema originario è inammissibile.

   (c) Alla fine della fase I si ha sempre a disposizione una base dalla quale far partire la fase II

(d) Il numero della varibili artificiali che si introducono nella definizione del problema artificiale che si risolve nella fase I è minore o uguale al numero dei vincoli di uguaglianza del problema originario. (**V**)

6. Sia dato un problema di PL in forma standard, e sia B una base ammissibile e N la matrice delle colonne fuori base.

   (a) Se per qualche indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ risulta $\pi_h = (B^{-1}N)_h \leq 0$, allora il criterio di illimitatezza è soddisfatto. (**V**)

   (b) Se la SBA corrente è degenere, allora nel criterio del rapporto minimo si avrà $\bar{\rho} = 0$ e quindi la succssiva SBA sarà anch'essa degenere.

   (c) Se esiste un indice $h \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\gamma_h = 0$, allora il criterio di ottimalità non può essere soddisfatto.

   (d) Se nel criterio del rapporto minimo esistono almeno due indici k per i quali il minimo è raggiunto, allora la successiva SBA è sicuramente degenere. (**V**)

7. Arrivati all'ottimo del problema artificiale che si risolve nella Fase I del metodo del simplesso abbiamo che risulta $x_B = (\alpha_1, x_3, \alpha_3, x_1)$, $x_N = (x_2, \alpha_2, x_4, \alpha_4)$,

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

   Allora

   (a) Il problema originario è inammissibile.

   (b) La matrice dei vincoli del problema originario non ha rango massimo. (**V**)

   (c) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la Fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_2, x_3, x_1)$. (**V**)

   (d) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la Fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_4, x_3, x_1)$. (**V**)

8. Ad una iterazione della fase II del metodo del simplesso si ha: $x_B = (x_2, x_5, x_4)^T$, $x_N = (x_3, x_6, x_1)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Se la funzione obiettivo (da minimizzare) è $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 9x_1 + x_2 + 7x_3 + 8x_6$ allora

   (a) La SBA corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

   (b) x_3 e x_1 sono le variabili candidate ad uscire dalla base.

   (c) La prossima SBA generata sarà degenere. (**V**)

   (d) L'unica variabile candidata ad entrare in base è x_3. (**V**)

9. Sia dato il seguente poliedro

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \tau x_3 &= 3 \\ x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

   (a) il punto $(1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$ è un vertice per ogni valore di τ (**V**)
   (b) esistono valori di τ per i quali il punto $(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è una SBA
   (c) per $\tau = 6$ il punto $(0,\ 0,\ 1/2,\ 2)^T$ è una SBA. (**V**)
   (d) il poliedro è vuoto per ogni valore di τ.

10. Dato il seguente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

   (a) Il suo duale è

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

   (**V**)
   (b) Il duale di (P) è univocamente determinato. (**V**)
   (c) Se si determina il duale del problema duale di (P) si ottiene di nuovo il problema (P). (**V**)
   (d) Se (P) ammette soluzione ottima allora anche il suo duale ammette soluzione ottima. (**V**)