

ESAME DI RICERCA OPERATIVA

Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

11 giugno 2018

Compito A

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo **VERO** o sul rettangolo **FALSO** sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
 - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
 - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
 - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
 - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 + 2x_1 - 1\}$ è un insieme convesso.
 - (b) L'insieme $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ non è un insieme convesso. (**V**)
 - (c) L'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi chiusi non è in generale un insieme convesso.
 - (d) Un insieme convesso è sempre costituito da un numero infinito di punti.
2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) Un poliedro non vuoto può essere illimitato in tal caso ammette infiniti vertici.
 - (b) Un politopo non vuoto ammette sempre vertici. (**V**)
 - (c) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 4\}$ ha un numero finito di vertici
 - (d) Se un poliedro non contiene semirette, allora ammette vertici
3. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare (con $x \in \mathbb{R}^4$):

$$\begin{aligned} \min \quad & [-\tau \quad \tau \quad -(2+\tau) \quad \tau]^T x \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\tau \\ 2 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Per $\tau \leq 0$ la matrice formata dalla 1^a, 2^a e 4^a colonna è una base ammissibile. (**V**)
 - (b) Per $\tau = 1$ la matrice formata dalla 1^a, 2^a e 4^a colonna è una base ammissibile. (**V**)
 - (c) Il problema non ammette una base ammissibile.
 - (d) Data una base ammissibile, una sola variabile sarà fuori base, per ogni valore di τ . (**V**)
4. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il punto $(2, 1, 1, 0)^T$ è vertice del poliedro. (**V**)
 - (b) Il punto $(2, 1, 1, 1)^T$ è vertice del poliedro.
 - (c) Il punto $(1, 2, 1, -1)^T$ appartiene al poliedro.
 - (d) Poiché il numero dei vincoli di uguaglianza è minore del numero delle variabili, il poliedro non ammette vertici.
5. Dato il problema primale (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

(a) Il relativo problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Il relativo problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \end{aligned}$$

(c) Il problema duale di (P) può essere inammissibile. **(V)**

(d) Se (P) è inammissibile allora anche il suo duale è inammissibile.

6. Si supponga di avere al termine della Fase I del metodo del Simplex la SBA $x_B = (x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4, \alpha_3, \alpha_6)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ -7 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dire quali affermazioni sono corrette:

(a) Poichè $(B^{-1}N)_4 \leq 0$ il problema ausiliario è illimitato.

(b) Il problema originale è inammissibile.

(c) Il problema originale è ammissibile ed ammette almeno una SBA degenera. **(V)**

(d) È necessario effettuare due scambi degeneri per eliminare dalla base α_1 e α_2 . **(V)**

7. Si consideri il seguente poliedro definito da

$$\begin{aligned} \beta x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 + 3x_3 &\leq 4 \\ x_2 + x_4 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Per $\beta = 1$ il punto $(1, 1, 1, 1)^T$ è vertice del poliedro.

(b) Il punto $(0, 1, -1, 1)^T$ appartiene al poliedro per ogni valore di β . **(V)**

(c) Esistono valori di β per cui l'origine degli assi $(0, 0, 0, 0)^T$ è vertice del poliedro.

(d) Per $\beta = 1$ poliedro non ammette vertici.

8. Sia dato un problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dire quali affermazioni sono corrette:

- (a) Al più ci sono tante SBA distinte quante sono le basi ammissibili. **(V)**
- (b) Se ad una iterazione della Fase II del metodo del simplesso risulta $\gamma \leq 0$ allora la SBA corrente non è ottima.
- (c) Se ad una iterazione della Fase II del metodo del simplesso risulta $\gamma = 0$ e tutti gli elementi della matrice $B^{-1}N$ non positivi, allora il problema non può essere illimitato inferiormente.
- (d) Ci sono tante SBA quanti sono i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema. **(V)**

9. Sia dato il problema di Programmazione Lineare (con $x \in \mathbb{R}^6$):

$$\begin{aligned} & \min (-18 \quad -2 \quad 4 \quad -2 \quad 6 \quad 0)^T x \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Al problema può essere direttamente applicata la Fase II del metodo del simplesso. **(V)**
- (b) Il punto $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ è una SBA ottima. **(V)**
- (c) Il problema ammette sicuramente almeno una SBA degenera. **(V)**
- (d) Il problema è illimitato inferiormente.

10. Sia dato un problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \quad \textit{intero}. \end{aligned}$$

- (a) Se P è una formulazione lineare per il problema allora deve risultare

$$P \cap \mathbf{Z}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

- (b) Se P e P' sono due formulazioni per il problema, allora deve risultare

$$P \cap \mathbf{Z}^n = P' \cap \mathbf{Z}^n$$

(V)

- (c) Se P e P' sono due formulazioni per il problema, si dice che P è migliore di P' se $P \subseteq P'$. **(V)**
- (d) Se un poliedro P ha tutti i vertici interi, allora esso è la formulazione ottima di ogni problema di Programmazione Lineare Intera con insieme ammissibile $P \cap \mathbf{Z}^n$. **(V)**