Esame di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

11 giugno 2018

$\boxed{\text{Compito A}}$

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo $\boxed{\text{VERO}}$ o sul rettangolo $\boxed{\text{FALSO}}$ sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = x_1^2 + 2x_1 - 1\}$ è un insieme convesso.

   (b) L'insieme $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ non è un insieme convesso.

   (c) L'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi chiusi non è in generale un insieme convesso.

   (d) Un insieme convesso è sempre costituito da un numero infinito di punti.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Un poliedro non vuoto può essere illimitato in tal caso ammette infiniti vertici.

   (b) Un politopo non vuoto ammette sempre vertici.

   (c) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 4\}$ ha un numero finito di vertici

   (d) Se un poliedro non contiene semirette, allora ammette vertici

3. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare (con $x \in \mathbb{R}^4$):

$$
\begin{array}{l}
\min \; [-\tau \;\; \tau \;\; -(2+\tau) \;\; \tau]^T \; x \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\tau \\ 2 \end{pmatrix} \\
x \geq 0.
\end{array}
$$

   (a) Per $\tau \leq 0$ la matrice formata dalla 1^a, 2^a e 4^a colonna è una base ammissibile.

   (b) Per $\tau = 1$ la matrice formata dalla 1^a, 2^a e 4^a colonna è una base ammissibile.

   (c) Il problema non ammette una base ammissibile.

   (d) Data una base ammissibile, una sola variabile sarà fuori base, per ogni valore di τ.

4. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & = & 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 5 \\
x_2 + x_4 & = & 1 \\
x_i \geq 0, & & i = 1, \dots, 4
\end{array}
$$

   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Il punto $(2,\ 1,\ 1,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

   (b) Il punto $(2,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è vertice del poliedro.

   (c) Il punto $(1,\ 2,\ 1,\ -1)^T$ appartiene al poliedro.

   (d) Poiché il numero dei vincoli di uguaglianza è minore del numero delle variabili, il poliedro non ammette vertici.

5. Dato il problema primale (P)

$$
\begin{array}{l}
\max \; c^T x \\
Ax \geq b \\
\quad x \geq 0,
\end{array}
$$

   dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

(a) Il relativo problema duale è

$$\begin{aligned} \min\ & b^T u \\ A^T u & \leq c \\ u & \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Il relativo problema duale è

$$\begin{aligned} \min\ & b^T u \\ A^T u & \leq c \end{aligned}$$

(c) Il problema duale di (P) può essere inammissibile.

(d) Se (P) è inammissible allora anche il suo duale è inammissibile.

6. Si supponga di avere al termine della Fase I del metodo del Simplesso la SBA $x_B = (x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4, \alpha_3, \alpha_6)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ -7 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dire quali affermazioni sono corrette:

(a) Poichè $(B^{-1}N)_4 \leq 0$ il problema ausiliario è illimitato.

(b) Il problema originale è inammissibile.

(c) Il problema originale è ammissibile ed ammette almeno una SBA degenere.

(d) È necessario effettuare due scambi degeneri per eliminare dalla base α_1 e α_2.

7. Si consideri il seguente poliedro definito da

$$\begin{aligned} \beta x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 + 3x_3 &\leq 4 \\ x_2 + x_4 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Per $\beta = 1$ il punto $(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è vertice del poliedro.

(b) Il punto $(0,\ 1,\ -1,\ 1)^T$ appartiene al poliedro per ogni valore di β.

(c) Esistono valori di β per cui l'origine degli assi $(0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

(d) Per $\beta = 1$ poliedro non ammette vertici.

8. Sia dato un problema di Programmazione Lineare nella forma

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dire quali affermazioni sono corrette:

(a) Al più ci sono tante SBA distinte quante sono le basi ammissibili.

(b) Se ad una iterazione della Fase II del metodo del simplesso risulta $\gamma \leq 0$ allora la SBA corrente non è ottima.

(c) Se ad una iterazione della Fase II del metodo del simplesso risulta $\gamma = 0$ e tutti gli elementi della matrice $B^{-1}N$ non positivi, allora il problema non può essere illimitato inferiormente.

(d) Ci sono tante SBA quanti sono i vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile del problema.

9. Sia dato il problema di Programmazione Lineare (con $x \in \mathbb{R}^6$):

$$\begin{aligned} &\min\ (-18 \quad -2 \ \ 4 \quad -2 \ \ 6 \ \ 0)^T\ x \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Al problema può essere direttamente applicata la Fase II del metodo del simplesso.

(b) Il punto $x = (0,0,0,0,0,0)^T$ è una SBA ottima.

(c) Il problema ammette sicuramente almeno una SBA degenere.

(d) Il problema è illimitato inferiormente.

10. Sia dato un problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0, \quad \textit{intero}. \end{aligned}$$

(a) Se P è una formulazione lineare per il problema allora deve risultare

$$P \cap \mathbf{Z}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b, x \geq 0\}$$

(b) Se P e P' sono due formulazioni per il problema, allora deve risultare

$$P \cap \mathbf{Z}^n = P' \cap \mathbf{Z}^n$$

(c) Se P e P' sono due formulazioni per il problema, si dice che P è migliore di P' se $P \subseteq P'$.

(d) Se un poliedro P ha tutti i vertici interi, allora esso è la formulazione ottima di ogni problema di Programmazione Lineare Intera con insieme ammissibile $P \cap \mathbf{Z}^n$.