# Esame di Ricerca Operativa

## Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

18 luglio 2018

**Compito A**

### Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo VERO o sul rettangolo FALSO sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

### Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

**Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti**

1. Quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette.

   (a) La funzione $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ è una funzione lineare. (**V**)

   (b) Sia dato il vettore dei coefficienti $a \in \mathbb{R}^n$, la costante $c \in \mathbb{R}$, e l'uguaglianza $a^T x = c$, con $x \in \mathbb{R}^n$ vettore delle variabili. Considerati i due punti $x_1$ e $x_2$ che soddisfano la precedente uguaglianza, allora i vettori $a$ e $(x_1 - x_2)$ sono ortogonali. (**V**)

   (c) La funzione reale di variabile reale $f(x) = x + |x|$ è lineare.

   (d) La funzione reale di variabile reale $f(x, y) = \cos(\pi)xy + 3x$ è lineare.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

   (a) L'unione e l'intersezione di un insieme convesso con l'insieme vuoto sono sempre convesse. (**V**)

   (b) Un insieme convesso può ammettere un numero infinito di vertici, un poliedro no. (**V**)

   (c) L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > |x|, y \leq 3\}$ è un insieme convesso. (**V**)

   (d) L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > x\}$ non contiene rette.

3. Sia dato l'insieme $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \geq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

   (a) Se $P$ contiene almeno un vertice allora è senz'altro $m \geq n$. (**V**)

   (b) Se $P$ contiene rette allora è senz'altro $m \leq n$.

   (c) Se $b = 0$ allora $P$ contiene certamente rette.

   (d) Per alcuni valori dei coefficienti di $A$, $P$ non è convesso.

4. Si consideri il problema artificiale (PA) che si risolve nella Fase I del metodo del simplesso. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Se tutte le variabili artificiali del problema (PA) all'ottimo sono fuori base il problema originario è ammissibile. (**V**)

   (b) Il problema artificiale (PA) può non ammettere soluzione ottima e in tal caso il problema originario non è ammissibile.

   (c) Si può sempre applicare la Fase II del metodo del simplesso al problema (PA). (**V**)

   (d) Quando si è ottenuto l'ottimo del problema artificiale (PA), allora tutte le variabile artificiali sono fuori base.

5. Si consideri il poliedro

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \tau x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Il punto $(0, \ -1, \ 0)$ è ammissibile per ogni valore di $\tau$.

   (b) Per $\tau = \frac{1}{2}$, il punto $(2, \ 0, \ -10)^T$ è un vertice.

   (c) Il punto $(-\frac{1}{2}, \ 0, \ 0)^T$ non è un vertice del poliedro per qualunque valore di $\tau$.

(d) Il punto $(-\frac{1}{2},\ 0,\ 0)^T$ non appartiene al poliedro qualunque sia il valore di $\tau$.

6. Si consideri l'iterazione corrente della Fase II del metodo del simplesso, per un problema di Programmazione Lineare in forma di minimizzazione. Siano $x_B = (x_1, x_7, x_3)$ e $x_N = (x_4, x_2, x_6, x_5)$:

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -\tau & 3-\tau & 1 & -\tau^2 \\ \tau & 2 & -6 & -\tau^4 \\ 0 & 0 & 1-\tau & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \tau^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau^2 \\ 1 \\ -\tau^2 \end{pmatrix},$$

dove $\tau$ è un parametro reale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) È possibile concludere che per $\tau = 0$ il problema è illimitato inferiormente.

(b) Se $\tau < 0$ non è soddisfatto il criterio di ottimalità. (**V**)

(c) Per ogni valore di $\tau$ la SBA corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

(d) La SBA corrente è degenere se e solo se $\tau = 0$.

7. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 4x_5 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 &= 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

(a) Il punto $(1/2,\ 1,\ 1/2,\ 0,\ 0)^T$ è vertice.

(b) Il punto $(1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ è vertice. (**V**)

(c) Il punto $(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$ è vertice.

(d) Il poliedro non ammette vertici.

8. Sia data una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ di un problema di PL (in forma standard). Si supponga che le variabili $x_1, x_2, x_3$ siano in base mentre le variabili $x_4, x_5, x_6, x_7$ sono fuori base. Il valore della funzione obiettivo in $\bar{x}$ è 7 e i coefficienti di costo ridotto sono $\gamma^T = (0, 2, -1, 2)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 14. (**V**)

(b) Non sono dati elementi sufficienti per calcolare il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$.

(c) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 19.

(d) La Soluzione di Base Ammissibile corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

9. Dato il problema primale $(P)$

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax \geq 0, \end{aligned}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

(a) Tutte le $u \in \mathbb{R}^m$ non negative tali che $A^T u = c$ sono soluzioni ammissibili del problema duale di $(P)$. (**V**)

(b) Le variabili del problema duale del problema $(P)$ sono tante quante sono le righe di $A$. (**V**)

(c) Il problema duale di $(P)$ ammette sempre una soluzione ammissibile.

(d) Il problema duale di $(P)$ può essere illimitato.

10. Sia data una matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

    (a) Condizione necessaria e sufficiente affinchè $A$ sia unimodulare è che tutti gli elementi di $A$ appartengano all'insieme $\{0, 1, -1\}$.

    (b) Se $A$ è una matrice totalmente unimodulare allora tutti i suoi elementi devono appartenere all'insieme $\{0, 1, -1\}$. (**V**)

    (c) La formulazione ottima di un problema di Programmazione Lineare Intera ha tutti i vertici a componenti intere. (**V**)

    (d) Se $P^*$ è la formulazione ottima di un problema di Programmazione Lineare Intera allora l'insieme ammissibile del problema di PLI può essere scritto come $P^* \cap \mathbf{Z}^n$. (**V**)