

ESAME DI RICERCA OPERATIVA

Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

18 luglio 2018

Compito A

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo **VERO** o sul rettangolo **FALSO** sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
 - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
 - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
 - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
 - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette.
 - (a) La funzione $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ è una funzione lineare.
 - (b) Sia dato il vettore dei coefficienti $a \in \mathbb{R}^n$, la costante $c \in \mathbb{R}$, e l'uguaglianza $a^T x = c$, con $x \in \mathbb{R}^n$ vettore delle variabili. Considerati i due punti x_1 e x_2 che soddisfano la precedente uguaglianza, allora i vettori a e $(x_1 - x_2)$ sono ortogonali.
 - (c) La funzione reale di variabile reale $f(x) = x + |x|$ è lineare.
 - (d) La funzione reale di variabile reale $f(x, y) = \cos(\pi)xy + 3x$ è lineare.
2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:
 - (a) L'unione e l'intersezione di un insieme convesso con l'insieme vuoto sono sempre convesse.
 - (b) Un insieme convesso può ammettere un numero infinito di vertici, un poliedro no.
 - (c) L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|, y \leq 3\}$ è un insieme convesso.
 - (d) L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ non contiene rette.
3. Sia dato l'insieme $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 - (a) Se P contiene almeno un vertice allora è senz'altro $m \geq n$.
 - (b) Se P contiene rette allora è senz'altro $m \leq n$.
 - (c) Se $b = 0$ allora P contiene certamente rette.
 - (d) Per alcuni valori dei coefficienti di A , P non è convesso.
4. Si consideri il problema artificiale (PA) che si risolve nella Fase I del metodo del simplesso. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) Se tutte le variabili artificiali del problema (PA) all'ottimo sono fuori base il problema originario è ammissibile.
 - (b) Il problema artificiale (PA) può non ammettere soluzione ottima e in tal caso il problema originario non è ammissibile.
 - (c) Si può sempre applicare la Fase II del metodo del simplesso al problema (PA).
 - (d) Quando si è ottenuto l'ottimo del problema artificiale (PA), allora tutte le variabili artificiali sono fuori base.
5. Si consideri il poliedro

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 + \tau x_3 &= -1 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 x_2 &\geq 0 \\
 x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il punto $(0, -1, 0)$ è ammissibile per ogni valore di τ .
- (b) Per $\tau = \frac{1}{2}$, il punto $(2, 0, -10)^T$ è un vertice.
- (c) Il punto $(-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ non è un vertice del poliedro per qualunque valore di τ .

- (d) Il punto $(-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ non appartiene al poliedro qualunque sia il valore di τ .
6. Si consideri l'iterazione corrente della Fase II del metodo del simplesso, per un problema di Programmazione Lineare in forma di minimizzazione. Siano $x_B = (x_1, x_7, x_3)$ e $x_N = (x_4, x_2, x_6, x_5)$:

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -\tau & 3-\tau & 1 & -\tau^2 \\ \tau & 2 & -6 & -\tau^4 \\ 0 & 0 & 1-\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \tau^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau^2 \\ 1 \\ -\tau^2 \end{pmatrix},$$

dove τ è un parametro reale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) È possibile concludere che per $\tau = 0$ il problema è illimitato inferiormente.
 (b) Se $\tau < 0$ non è soddisfatto il criterio di ottimalità.
 (c) Per ogni valore di τ la SBA corrente soddisfa il criterio di ottimalità.
 (d) La SBA corrente è degenera se e solo se $\tau = 0$.
7. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 4x_5 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 &= 6 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

- (a) Il punto $(1/2, 1, 1/2, 0, 0)^T$ è vertice.
 (b) Il punto $(1, 2, 0, 0, 0)^T$ è vertice.
 (c) Il punto $(1, 0, 0, 1, 0)^T$ è vertice.
 (d) Il poliedro non ammette vertici.
8. Sia data una soluzione di base ammissibile \bar{x} di un problema di PL (in forma standard). Si supponga che le variabili x_1, x_2, x_3 siano in base mentre le variabili x_4, x_5, x_6, x_7 sono fuori base. Il valore della funzione obiettivo in \bar{x} è 7 e i coefficienti di costo ridotto sono $\gamma^T = (0, 2, -1, 2)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
- (a) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 14.
 (b) Non sono dati elementi sufficienti per calcolare il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$.
 (c) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 19.
 (d) La Soluzione di Base Ammissibile corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

9. Dato il problema primale (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq 0, \end{aligned}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) Tutte le $u \in \mathbb{R}^m$ non negative tali che $A^T u = c$ sono soluzioni ammissibili del problema duale di (P).
 (b) Le variabili del problema duale del problema (P) sono tante quante sono le righe di A.

- (c) Il problema duale di (P) ammette sempre una soluzione ammissibile.
 - (d) Il problema duale di (P) può essere illimitato.
10. Sia data una matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
- (a) Condizione necessaria e sufficiente affinché A sia unimodulare è che tutti gli elementi di A appartengano all'insieme $\{0, 1, -1\}$.
 - (b) Se A è una matrice totalmente unimodulare allora tutti i suoi elementi devono appartenere all'insieme $\{0, 1, -1\}$.
 - (c) La formulazione ottima di un problema di Programmazione Lineare Intera ha tutti i vertici a componenti intere.
 - (d) Se P^* è la formulazione ottima di un problema di Programmazione Lineare Intera allora l'insieme ammissibile del problema di PLI può essere scritto come $P^* \cap \mathbf{Z}^n$.