

ESAME DI RICERCA OPERATIVA

Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

6 settembre 2018

Compito A

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo **VERO** o sul rettangolo **FALSO** sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
 - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
 - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
 - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
 - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) Un poliedro è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni lineari e non lineari.
 - (b) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 3, x_1 + x_2^2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ è un poliedro in forma standard.
 - (c) Un poliedro può essere sempre posto nella forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ con A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. **(V)**
 - (d) Una sfera di centro l'origine e raggio 1 è un poliedro.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) Una formulazione lineare P di un problema di Programmazione Lineare Intera è un insieme convesso, ma non necessariamente un poliedro.
 - (b) La formulazione ottima di un problema di Programmazione Lineare Intera ha sempre tutti i vertici interi. **(V)**
 - (c) Se P_1 e P_2 sono due formulazioni di un Problema di Programmazione Lineare Intera, se $P_1 \supseteq P_2$, allora P_1 è migliore di P_2 .
 - (d) Se la soluzione ottima di un rilassamento di un Problema di Programmazione Lineare Intera è a componenti intere, allora è anche soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera. **(V)**

3. Sia dato un problema di Programmazione Lineare in forma standard e una base ammissibile. Si supponga che il valore della funzione obiettivo nella soluzione di base corrente sia 25. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
 - (a) Se il test di ottimalità e quello di illimitatezza falliscono, allora la fase II del metodo del simplesso genera una nuova soluzione di base ammissibile in cui il valore della funzione obiettivo è non superiore a 25. **(V)**
 - (b) Se il test di ottimalità è verificato, allora il valore ottimo del problema è 25. **(V)**
 - (c) Se il test di illimitatezza è soddisfatto, allora la fase II del metodo del simplesso genera una nuova soluzione di base ammissibile in cui il valore della funzione obiettivo è inferiore a 25.
 - (d) Se il test di ottimalità e quello di illimitatezza falliscono, allora il valore ottimo del problema è sicuramente inferiore a 25.

4. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_5 &= 15 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il punto $(1, 0, 0, 0, 1)^T$ è vertice del poliedro.
- (b) Il punto $(0, -21, 12, 0, 0)^T$ è vertice del poliedro.
- (c) Il punto $(2, 5, 0, 4, 0)^T$ appartiene al poliedro. **(V)**
- (d) L'origine degli assi appartiene al poliedro.

5. Al termine della fase I del metodo del simplesso applicato alla soluzione di un problema di PL risulta $x_B = (\alpha_1, x_1, \alpha_3, x_4)^T$, $x_N = (\alpha_2, x_2, \alpha_4, x_3)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 21 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il problema originario è ammissibile. **(V)**
 - (b) Il problema originario ha un vincolo ridondante. **(V)**
 - (c) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_2, x_1, x_4)^T$. **(V)**
 - (d) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_3, x_1, x_4)^T$. **(V)**
6. Si consideri il seguente poliedro definito da

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ 4x_1 + \tau x_2 + x_3 &\geq 5 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il punto $(1, 0, 1)^T$ è vertice del poliedro per ogni valore di τ .
 - (b) Per $\tau = 0$ il poliedro è vuoto.
 - (c) L'origine degli assi $(0, 0, 0)^T$ è vertice del poliedro.
 - (d) Per $\tau = 5$ il punto $(0, 1, 0)^T$ è vertice del poliedro. **(V)**
7. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
- (a) La Fase 1 del metodo del simplesso permette di capire se il problema originario è ammissibile ed anche se la matrice dei vincoli di uguaglianza del problema originario ha rango massimo. **(V)**
 - (b) Il problema artificiale (ausiliario) che si risolve nella Fase 1 del metodo del simplesso è un problema di PL che può non ammettere soluzione ottima; in tale caso il problema originario è inammissibile.
 - (c) Se il problema originario è ammissibile, allora il valore ottimo del problema artificiale (ausiliario) che si risolve nella Fase 1 è pari a zero. **(V)**
 - (d) Nel caso in cui il problema originario è ammissibile, la Fase 1 permette di determinare una base ammissibile del problema originario che è la base dalla quale far partire la Fase 2. **(V)**
8. In un'iterazione della fase II del metodo del simplesso applicato ad un problema di Programmazione Lineare in forma di minimizzazione si ha $x_B = (x_7, x_2, x_3, x_5)^T$ e $x_N = (x_6, x_1, x_8, x_4)^T$, ed inoltre risulta $\gamma = (-1, 1, -1, 0)^T$.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 25 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora la successiva Soluzione di Base Ammissibile sarà degenera. **(V)**
- (b) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora la variabile uscente deve essere x_5 .
- (c) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora il valore di $\bar{\rho}$ è pari a 0. **(V)**
- (d) x_6 è l'unica variabile che può entrare in base.

9. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u \leq -c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

(V)

- (c) Non è possibile scrivere il suo duale perché è in forma di massimizzazione.
- (d) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T u \\ & -A^T u \geq c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

10. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \\ & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ & 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) Il problema è illimitato inferiormente.
- (b) La prima e la sesta colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile. (**V**)
- (c) La soluzione base ammissibile associata alla base formata dalla prima e dalla seconda colonna verifica il criterio di ottimalità. (**V**)
- (d) La soluzione di base ammissibile associata alla base formata dalla prima e dalla seconda colonna è $(1, 1/2, 0, 0, 0, 0)^T$. (**V**)