Esame di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

6 settembre 2018

$\boxed{\text{Compito A}}$

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo $\boxed{\text{VERO}}$ o sul rettangolo $\boxed{\text{FALSO}}$ sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Un poliedro è l'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni lineari e non lineari.

   (b) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + x_2^2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ è un poliedro in forma standard.

   (c) Un poliedro può essere sempre posto nella forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ con A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

   (d) Una sfera di centro l'origine e raggio 1 è un poliedro.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Una formulazione lineare P di un problema di Programmazione Lineare Intera è un insieme convesso, ma non necessariamente un poliedro.

   (b) La formulazione ottima di un problema di Programmmazione Lineare Intera ha sempre tutti i vertici interi.

   (c) Se P_1 e P_2 sono due formulazioni di un Problema di Programmazione Lineare Intera, se $P_1 \supseteq P_2$, allora P_1 è migliore di P_2.

   (d) Se la soluzione ottima di un rilassamento di un Problema di Programmazione Lineare Intera è a componenti intere, allora è anche soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera.

3. Sia dato un problema di Programmazione Lineare in forma standard e una base ammissibile. Si supponga che il valore della funzione obiettivo nella soluzione di base corrente sia 25. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Se il test di ottimalità e quello di illimitatezza falliscono, allora la fase II del metodo del simplesso genera una nuova soluzione di base ammissibile in cui il valore della funzione obiettivo è non superiore a 25.

   (b) Se il test di ottimalità è verificato, allora il valore ottimo del problema è 25.

   (c) Se il test di illimitatezza è soddisfatto, allora la fase II del metodo del simplesso genera una nuova soluzione di base ammissibile in cui il valore della funzione obiettivo è inferiore a 25.

   (d) Se il test di ottimalità e quello di illimitatezza falliscono, allora il valore ottimo del problema è sicuramente inferiore a 25.

4. Si consideri il poliedro descritto dal seguente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_5 &= 15 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

   (a) Il punto $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$ è vertice del poliedro.

   (b) Il punto $(0,\ -21,\ 12,\ 0,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

   (c) Il punto $(2,\ 5,\ 0,\ 4,\ 0)^T$ appartiene al poliedro.

   (d) L'origine degli assi appartiene al poliedro.

5. Al termine della fase I del metodo del simplesso applicato alla soluzione di un problema di PL risulta $x_B = (\alpha_1, x_1, \alpha_3, x_4)^T$, $x_N = (\alpha_2, x_2, \alpha_4, x_3)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 21 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il problema originario è ammissibile.

(b) Il problema originario ha un vincolo ridondante.

(c) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_2, x_1, x_4)^T$.

(d) Una possibile base ammissibile per il problema originario dalla quale far partire la fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_3, x_1, x_4)^T$.

6. Si consideri il seguente poliedro definito da

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ 4x_1 + \tau x_2 + x_3 &\geq 5 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il punto $(1,\ 0,\ 1)^T$ è vertice del poliedro per ogni valore di τ.

(b) Per $\tau = 0$ il poliedro è vuoto.

(c) L'origine degli assi $(0,\ 0,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

(d) Per $\tau = 5$ il punto $(0,\ 1,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

7. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) La Fase 1 del metodo del simplesso permette di capire se il problema originario è ammissibile ed anche se la matrice dei vincoli di uguaglianza del problema originario ha rango massimo.

(b) Il problema artificiale (ausiliario) che si risolve nella Fase 1 del metodo del simplesso è un problema di PL che può non ammettere soluzione ottima; in tale caso il problema originario è inammissibile.

(c) Se il problema originiario è ammissibile, allora il valore ottimo del problema artificiale (ausiliario) che si risolve nella Fase 1 è pari a zero.

(d) Nel caso in cui il problema originario è ammissibile, la Fase 1 permette di determinare una base ammissibile del problema originario che è la base dalla quale far partire la Fase 2.

8. In un'iterazione della fase II del metodo del simplesso applicato ad un problema di Programmazione Lineare in forma di minimizzazione si ha $x_B = (x_7, x_2, x_3, x_5)^T$ e $x_N = (x_6, x_1, x_8, x_4)^T$, ed inoltre risulta $\gamma = (-1, 1, \ -1, 0)^T$.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 25 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora la successiva Soluzione di Base Ammissibile sarà degenere.

(b) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora la variabile uscente deve essere x_5.

(c) Supponiamo che x_6 sia la variabile entrante. Allora il valore di $\bar{\rho}$ è pari a 0.

(d) x_6 è l'unica variabile che può entrare in base.

9. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u \leq -c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

(c) Non è possibile scrivere il suo duale perché è in forma di massimizzazione.

(d) Il suo problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T u \\ & -A^T u \geq c \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

10. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \\ & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ & 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots 6. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il problema è illimitato inferiormente.

(b) La prima e la sesta colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile.

(c) La soluzione base ammissibile associata alla base formata dalla prima e dalla seconda colonna verifica il criterio di ottimalità.

(d) La soluzione di base ammissibile associata alla base formata dalla prima e dalla seconda colonna è $(1, \quad 1/2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0)^T$.