Linguaggi per il Web
prof. Riccardo Rosati
corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Sapienza Università di Roma, a.a. 2014/2015

Esercizi su espressioni regolari e grammatiche non contestuali

Esercizio 1 Scrivere un'espressione regolare e che denota le costanti reali (`double`) nel linguaggio java, prevedendo anche la notazione esponenziale. Si considerino i seguenti esempi: 3.0 E+2, -0.33 E-2, +5.001, .3.

Soluzione Notiamo che:

1) il segno davanti al numero è opzionale
2) l'esponenziale posto al termine del numero è opzionale
3) deve esserci obbligatoriamente il punto (le costanti senza punto sono costanti intere e non reali)
4) deve esserci obbligatoriamente una cifra dopo il punto

L'espressione regolare sarà pertanto:

$$e = (+ \mid - \mid \varepsilon)(0 \mid 1 \mid 2 \ldots \mid 9)^*.(0 \mid 1 \ldots \mid 9)(0 \mid 1 \ldots \mid 9)^*(\varepsilon \mid E(+ \mid - \mid \varepsilon)(0 \mid 1 \ldots \mid 9)^+)$$

che può anche essere scritta come

$$e = (+ \mid - \mid \varepsilon)(0 \mid 1 \mid 2 \ldots \mid 9)^*.(0 \mid 1 \ldots \mid 9)^+(\varepsilon \mid E(+ \mid - \mid \varepsilon)(0 \mid 1 \ldots \mid 9)^+)$$

Esercizio 2 Sia L il seguente linguaggio sull'alfabeto $\{a, b, c\}$:

$$L = \{a^n\, b^m\, c^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

Definire una grammatica non contestuale G tale che $\mathcal{L}(G) = L$.

Soluzione Una grammatica che genera il linguaggio L è la seguente:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSc \\ S & \rightarrow & B \\ S & \rightarrow & \epsilon \\ B & \rightarrow & bB \\ B & \rightarrow & \epsilon \end{array}$$

Si osservi anche che non esiste una espressione regolare e tale che $\mathcal{L}(e) = L$.

Esercizio 3 Sia data la grammatica $G =< V_T, V_N, S, P >$, in cui

$$P = \begin{cases} S & \rightarrow & A \\ S & \rightarrow & cSc \\ A & \rightarrow & aa \mid bb \end{cases}$$

1. determinare se la stringa *ccccbbcccc* appartiene a $\mathcal{L}(G)$ e, in caso affermativo, scrivere una derivazione canonica sinistra della stringa.
2. determinare se la stringa *ccaabbcc* appartiene a $\mathcal{L}(G)$ e, in caso affermativo, scrivere una derivazione canonica sinistra della stringa.

Soluzione Per quanto riguarda la stringa *ccccbbcccc* possiamo notare che essa risulta ottenibile mediante la seguente derivazione:

$$S \rightarrow cSc \rightarrow ccScc \rightarrow cccSccc \rightarrow ccccScccc \rightarrow ccccAcccc \rightarrow ccccbbcccc \tag{1}$$

che corrisponde all'applicazione della prima produzione per quattro volte, e, successivamente, all'applicazione della seconda e della terza produzione della grammatica G.

Osservando ora la seconda stringa, ovvero *ccaabbcc*, notiamo che il processo di derivazione non ci consente di derivarla: infatti possiamo ottenere le seguenti derivazioni (2) o (3):

$$S \rightarrow cSc \rightarrow ccScc \rightarrow ccAcc \rightarrow ccaacc \tag{2}$$

$$S \rightarrow cSc \rightarrow ccScc \rightarrow ccAcc \rightarrow ccbbcc \tag{3}$$

ma non abbiamo modo di derivare la stringa *ccaabbcc* che, pertanto, non appartiene a $\mathcal{L}(G)$.

Esercizio 4 Sia data la seguente grammatica G:

START	$\rightarrow$	`"inizio"` START `"fine"` | CORPO
CORPO	$\rightarrow$	PARTE1 PARTE2
PARTE1	$\rightarrow$	`"atomo1"` PARTE1 | ϵ
PARTE2	$\rightarrow$	`"atomo2"` | `"atomo2"` PARTE2

Per ognuna delle seguenti stringhe, dire se la stringa appartiene al linguaggio generato da G, ed in caso affermativo scrivere una derivazione canonica sinistra della stringa:

1. `"inizio" "inizio" "atomo1" "atomo1" "atomo2" "atomo2" "fine" "fine"`
2. `"inizio" "atomo1" "atomo2" "atomo2" "fine" "fine"`

Esercizio 5 Sia data la grammatica $G =< V_T, V_N, S, P >$ in cui

$$P = \begin{cases} S & \rightarrow & S'rS' \mid r \\ S' & \rightarrow & S'iS' \mid f \end{cases}$$

Dire se le seguenti stringhe appartengono a $\mathcal{L}(G)$, ed in caso affermativo scrivere una derivazione canonica sinistra per la stringa: $s_1 = frfif$, $s_2 = fifrfif$, $s_3 = frfifrfif$, $s_4 = fififrfif$,

Soluzione Le stringhe s_1, s_2 e s_4 appartengono a $\mathcal{L}(G)$, mentre per la terza stringa abbiamo che $s_3 \notin \mathcal{L}(G)$. Di seguito diamo le derivazioni per le stringhe s_1 ed s_2, lasciando al lettore l'individuazione di una derivazione per s_4. Una derivazione canonica sinistra per $frfif$ è la seguente:

$$S \to S'rS' \to frS' \to frS'iS' \to frfiS' \to frfif$$

Una derivazione canonica sinistra per $fifrfif$ è la seguente:

$$S \to S'rS' \to S'iS'rS' \to fiS'rS' \to fifrS' \to fifrS'iS' \to fifrfiS' \to fifrfif$$

Esercizio 6 Data la seguente grammatica G:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\,S\,B \mid C \\ A & \to & A\,a\,c \mid a \mid a\,a \\ B & \to & B\,b \mid B\,b\,c \mid b \\ C & \to & c \end{array}$$

Scrivere una grammatica G' tale che G' non presenti ricorsione sinistra diretta e $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$.

Soluzione

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\,S\,B \mid C \\ A & \to & a\,A' \mid a\,a\,A' \\ A' & \to & \epsilon \mid a\,c\,A' \\ B & \to & b\,B' \\ B' & \to & \epsilon \mid b\,B' \mid b\,c\,B' \\ C & \to & c \end{array}$$

Esercizio 7 Data la seguente grammatica G:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\,S\,B \mid C \\ A & \to & a\,b\,A\,c \mid a\,b \\ B & \to & b\,B \mid b \\ C & \to & c\,D\,A\,c \mid c\,D\,d \\ D & \to & d\,d \mid e\,d\,d \end{array}$$

Scrivere una grammatica G' tale che G' non presenti prefissi comuni e $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$.

Soluzione

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\,S\,B \mid C \\ A & \to & a\,b\;A' \\ A' & \to & A\,c \mid \epsilon \\ B & \to & b\,B' \\ B' & \to & B \mid \epsilon \\ C & \to & c\,D\,C' \\ C & \to & A\,c \mid d \\ D & \to & d\,d \mid e\,d\,d \end{array}$$

Esercizio 8 Data la seguente grammatica G:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A\,S\,B \mid S\,B\,C \mid S\,C \mid D \\ A & \rightarrow & A\,a\,c \mid A\,a \mid a\,a \\ B & \rightarrow & B\,b \mid B\,b\,c \mid b \\ C & \rightarrow & c\,D \mid c\,D\,d \\ D & \rightarrow & d\,d \mid d\,e \mid d\,e\,f \end{array}$$

Scrivere una grammatica G' tale che: (i) G' non presenti né ricorsione sinistra diretta né prefissi comuni; (ii) $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$.