Capitolo 6

Matrici d'incidenza e loro proprietà

6.1 Definizioni fondamentali

Sia dato un grafo orientato $G(N, A)$, con $|N| = n$ e $|A| = m$. Associamo a G una matrice M di dimensione $n \times m$ a componenti $(0, 1, -1)$ nel seguente modo. Ogni riga è associata a un nodo di N, ogni colonna è associata a un arco di A. In particolare, la colonna di M associata all'arco $uv \in A$ avrà esattamente un -1 in corrispondenza della riga associata al nodo u, un $+1$ in corrispondenza della riga associata al nodo v, e 0 in tutte le altre righe. M è detta *matrice d'incidenza* (nodi-archi) di G.

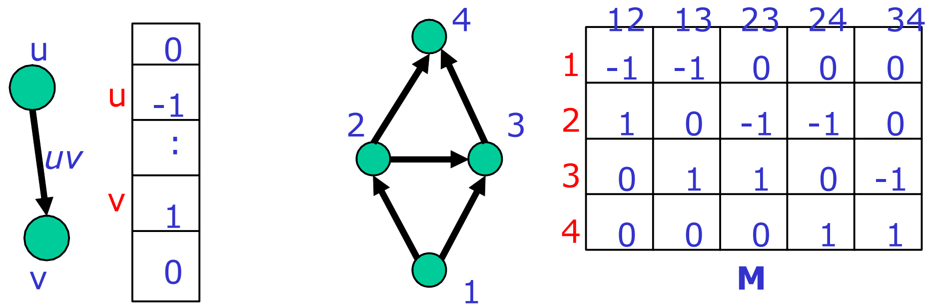

Figura 6.1: Matrice di incidenza

Teorema 6.1.1 (Teorema della base della matrice d'incidenza) *Sia M la Matrice di Incidenza di un grafo $G(N, A)$ e sia $M_T = \{m^1, m^2, ..., m^q\}$ l'insieme di colonne di M associate ad un generico insieme di archi $T = \{e_1, ..., e_q\}$ di A. Abbiamo che l'insieme di colonne (vettori di R^n) M_T è LINEARMENTE INDIPENDENTE se e solo se T è una FORESTA di $G(N, A)$.*

Dim. Dimostriamo prima di tutto la sufficienza del teorema, e cioè dimostriamo che se $T = \{e_1, ..., e_q\}$ è una foresta allora $M_T = \{m^1, m^2, ..., m^q\}$ è un insieme di colonne linearmente indipendente. Supponiamo per assurdo che le colonne di M_T non siano linearmente indipendenti. Esisteranno allora q moltiplicatori non tutti nulli $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, tali che $\lambda_1 m^1 + \lambda_2 m^2 + \ldots \lambda_q m^q = 0_n$. Sia $T' = \{e_t \in T : \lambda_t \neq 0\}$ (ovvero l'insieme degli archi corrispondenti a moltiplicatori non nulli) e sia $M_{T'}$ il corrispondente insieme di colonne di M. Chiaramente sarà $\sum_{t \in M_{T'}} \lambda_t m^t = 0_n$. Essendo T una foresta ed essendo $T' \subseteq T$, anche T' è una foresta; inoltre, per come T' é costruito, ogni componente connessa di T' contiene almeno un arco e quindi contiene almeno due nodi. Quindi, per il Teorema delle due foglie 2.4.2, T' contiene almeno una foglia v_k. Sia $e_j \in T'$ l'unico arco di T' incidente in v_k. Questo implica che m^j è l'unica colonna

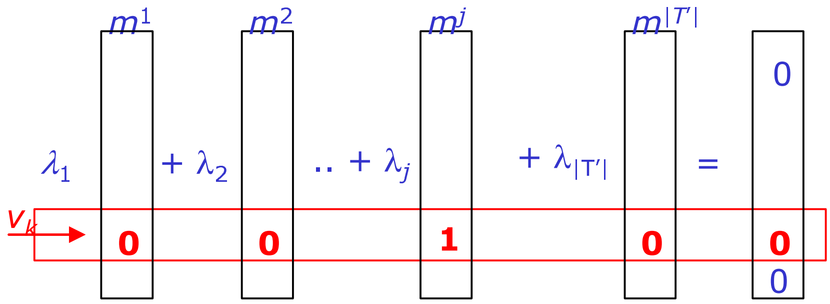

Figura 6.2: Dimostrazione sufficienza del teorema 6.1.1

di $M_{T'}$ con un coefficiente non nullo in corrispondenza della riga associata al nodo v_k; supponiamo per semplicità che sia $m_{kj} = +1$ (cioè l'arco e_j è uscente dal nodo v_k).

Per quanto detto, $m_{kt} = 0$ per ogni $t \in T' - \{j\}$. Ma quindi abbiamo $\sum_{t \in M_{T'}} \lambda_t m_{kt} = \lambda_j m_{kj} = \lambda_j \neq 0$, contraddizione.

Dimostriamo ora la necessità del teorema, dimostriamo cioè che se M_T è un insieme di colonne linearmente indipendenti, allora T è una foresta. Supponiamo per assurdo che $H(S,T)$ non sia una foresta (ove S è l'insieme dei nodi estremi degli archi in T); quindi $H(S,T)$ contiene almeno un ciclo, sia $C = \{v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_1\}$.

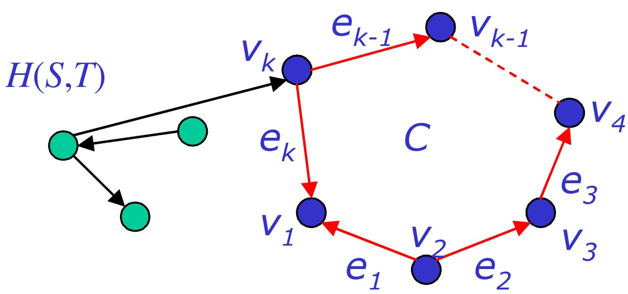

Figura 6.3: Dimostrazione necessità del teorema 6.1.1

Consideriamo ora un generico arco e_i del ciclo: tale arco sarà detto *arco diretto* se $e_i = (v_i, v_{i+1})$; sarà detto *arco inverso* se $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ (qui e nel resto della dimostrazione si intenderà $k + 1 = 1$). Senza perdita di generalità, possiamo supporre che i nodi del ciclo $v_1, \dots v_k$ siano associati, rispettivamente, alla riga $1, \dots, k$ della matrice M. Ora, sia $m^i = (m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{ii}, m_{i+1,i}, \dots, m_{ni})$ il vettore d'incidenza dell'arco $e_i \in C$. Se e_i è un arco diretto si avrà $m_{ii} = -1$ e $m_{i+1,i} = 1$; se e_i è un arco inverso, sarà $m_{ii} = 1$ e $m_{i+1,i} = -1$. Indicando con u^i il vettore a n componenti tutte nulle tranne l'i-esima di valore 1, è facile vedere che $m^i = u^{i+1} - u^i$ se e_i è un arco diretto, mentre $m^i = u^i - u^{i+1}$ se e_i è un arco inverso.

Adesso, scegliendo come moltiplicatori $\lambda_i = -1$ se e_i è diretto, e $\lambda_i = 1$ se e_i è inverso, è facile vedere che $\lambda_i m^i = u^i - u^{i+1}$ e quindi

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m^i = \sum_{i=1}^{k} u^i - u^{i+1} = (u^1 - u^2) + (u^2 - u^3) + \ldots + (u^k - u^1) = 0_n,$$

e quindi le colonne di M_C sono linearmente dipendenti, contraddizione.

Teorema 6.1.2 (Teorema del rango della matrice d'incidenza) *Sia $G(N, A)$ un grafo orientato e connesso e sia M la sua matrice di incidenza. Allora il rango di M è pari a $n - 1$.*

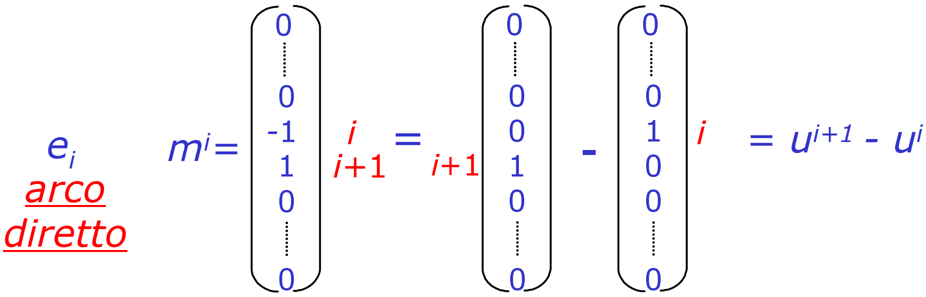

Figura 6.4: Vettori d'incidenza di archi diretti

Dim. La matrice d'incidenza ha esattamente n righe; ogni colonna della matrice ha esattamente due elementi diversi da 0, di valore 1 e -1. Quindi, sommando fra loro tutte le righe (e cioè combinandole linearmente con moltiplicatori tutti pari a 1) si ottiene il vettore riga nullo. Quindi le righe di M sono linearmente dipendenti e il rango di M sarà al più $n-1$.

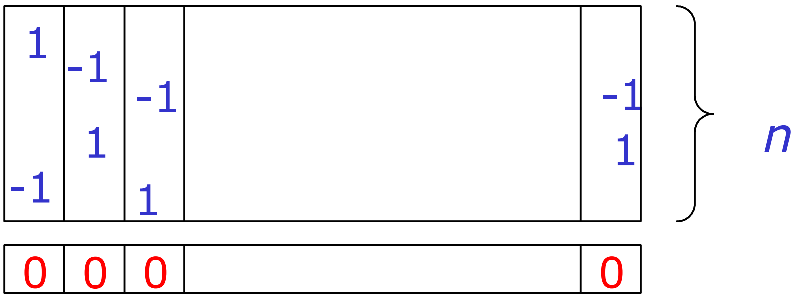

Figura 6.5: Le righe di M sono linearmente dipendenti

Mostriamo ora che il rango di M è almeno pari a $n-1$. Essendo G un grafo connesso, esisterà un albero ricoprente T. Essendo T un albero ricoprente di G, sarà $|T| = n-1$ (Teorema del numero degli archi di un albero 2.4.3). Per quanto illustrato nel Teorema 6.1.1, le colonne corrispondenti all'insieme T sono linearmente indipendenti, e quindi il rango di M sarà $\geq |T| = n-1$, c.d.d.

Teorema 6.1.3 (Teorema della base della matrice d'incidenza di G) *Sia $G(N, A)$ un grafo orientato e connesso. Una sottomatrice quadrata $B(n-1 \times n-1)$ di M è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono all'insieme di archi T_B di un albero ricoprente di G.*

Dim. Una matrice B è non singolare se e solo se le colonne di B sono linearmente indipendenti. Ma per il Teorema 6.1.1, le colonne di B sono linearmente indipendenti se e solo se T_B sono gli archi di una foresta di G. Ma essendo $|T_B| = n-1$ si ha che T_B è un albero ricoprente di G.