Ottimizzazione Combinatoria

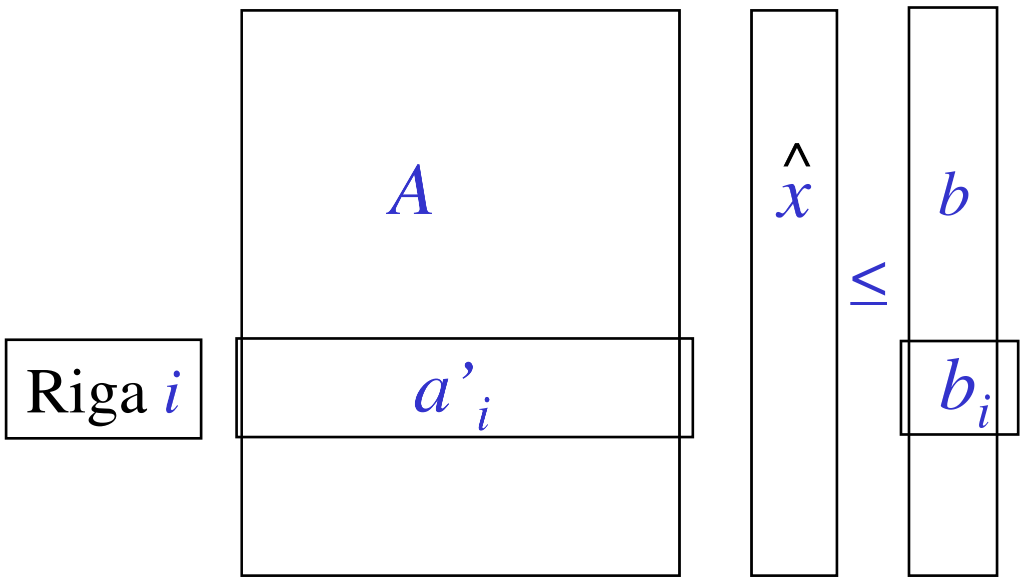
Separazione, Metodo del Simplesso Dinamico e Lower Bound da soluzioni 0-1

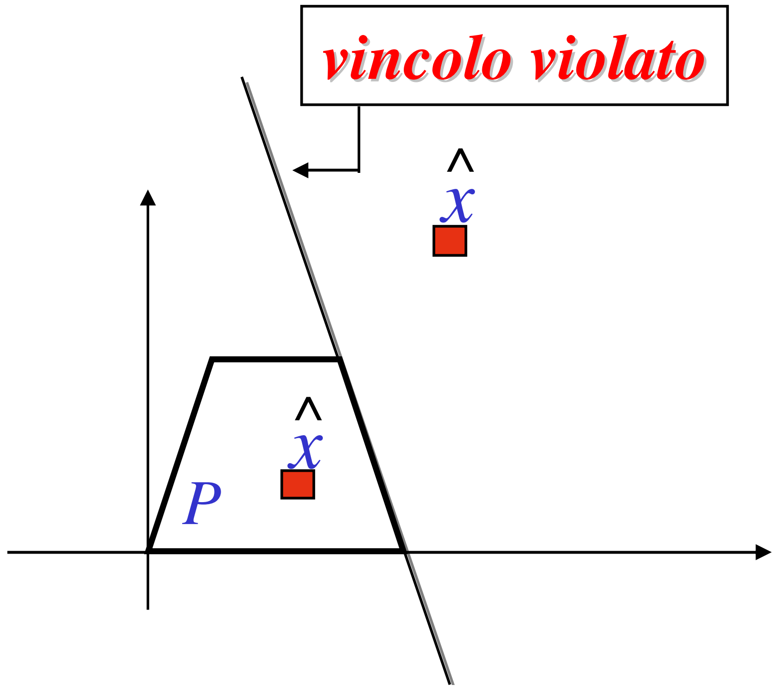
Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma "La Sapienza"

A.A. 2011

Oracolo di Separazione

Descrizione "***implicita***" di: $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0_n\}$

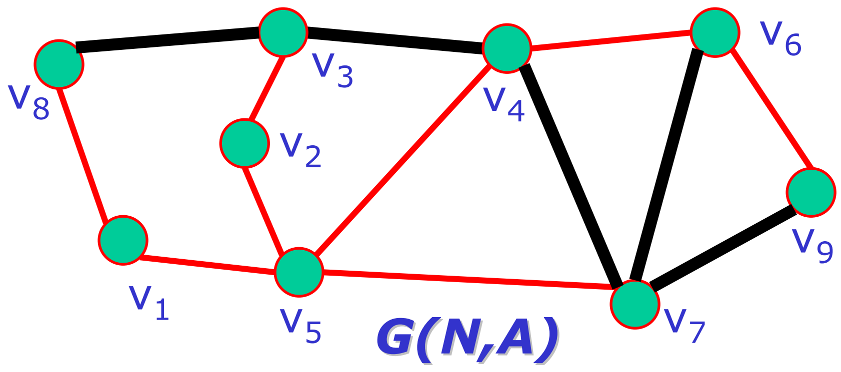




Esempio: "grafo connesso ricoprente"

Grafo connesso $G(N,A)$

$\mathcal{S} = \{$ insiemi di archi la cui rimozione non disconnette il grafo $G(N,A)\}$



$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \bar{T})$ connesso

Circuiti = Tagli minimali

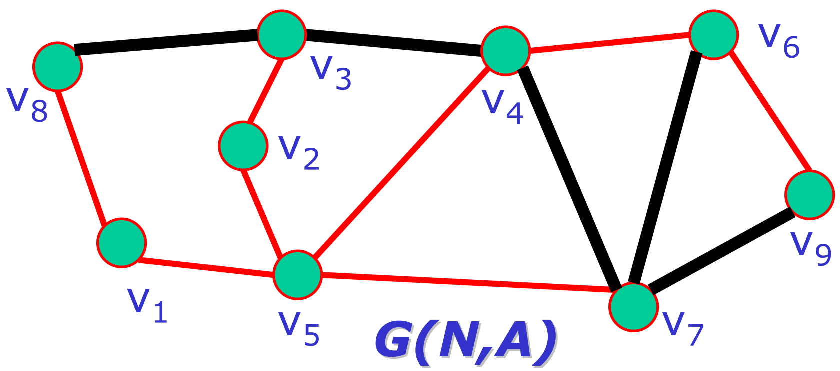
Formulazione circuiti:

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} y_e \leq |K| - 1, & K \text{ taglio} \\ y_e \geq 0, & e \in E \end{cases}$$

Esempio: "grafo connesso ricoprente" (II)

Grafo connesso G(N,A)

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \overline{T})$ connesso ricoprente



$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} y_e \le |K| - 1, & K \text{ taglio} \\ y_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

$$y \in P_C \cap \{0,1\}^{|E|}$$
$$\Leftrightarrow x = (1_{|E|} - y)$$

x vettore di incidenza degli archi di un sottografo connesso ricoprente

$$P = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \ge 1 & K \text{ taglio} \\ 0 \le x_e \le 1 & e \in E \end{cases}$$

Formulazione ("tagli") di :

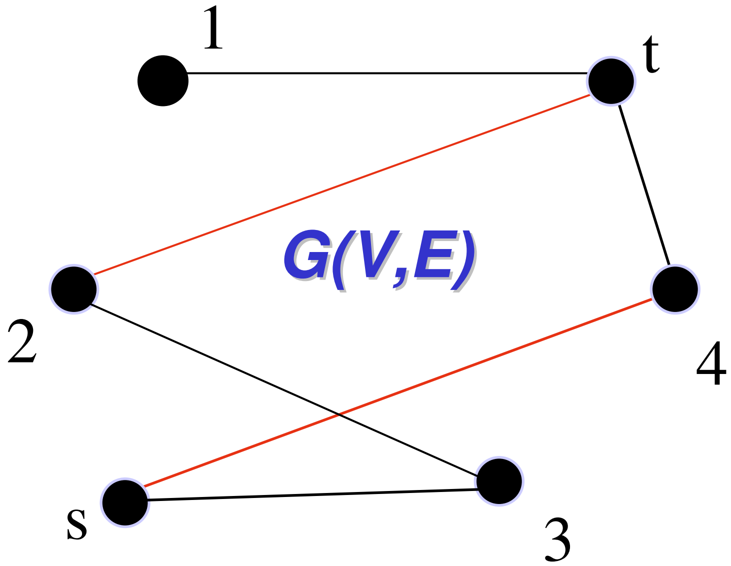
$$S = \left\{ \begin{array}{l} x : x = 1_{|E|} - y, \\ y \in P_C \cap \{0,1\}^{|E|} \end{array} \right\}$$

Grafo connesso ricoprente: separazione

x **vettore di incidenza** *degli archi di un* **sottografo connesso ricoprente**

Formulazione "tagli":

$$P = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \geq 1 & K \text{ taglio} \\ 0 \leq x_e \leq 1 & e \in E \end{cases}$$



ORACOLO DI SEPARAZIONE

$\hat{x} \in R^n$ →

- **Se** $\hat{x}_e > 1$ o $\hat{x}_e < 0$ *per qualche* $e \in E$ → $\hat{x} \notin P$

  [verificabile per ispezione]

- **Se** *esiste un taglio* K *di* G *tale che* $\sum_{e \in K} \hat{x}_e < 1$ → $\hat{x} \notin P$

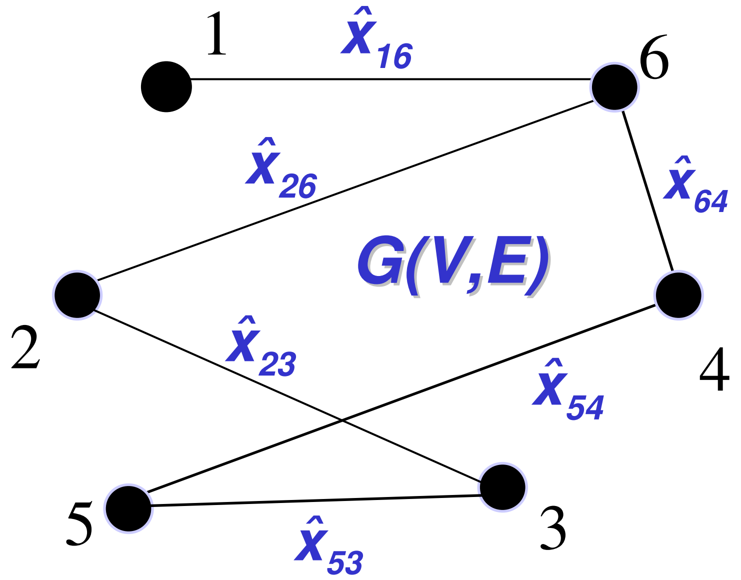
  [per ***ogni coppia s-t*** applica *flusso-massimo/taglio-minimo*]

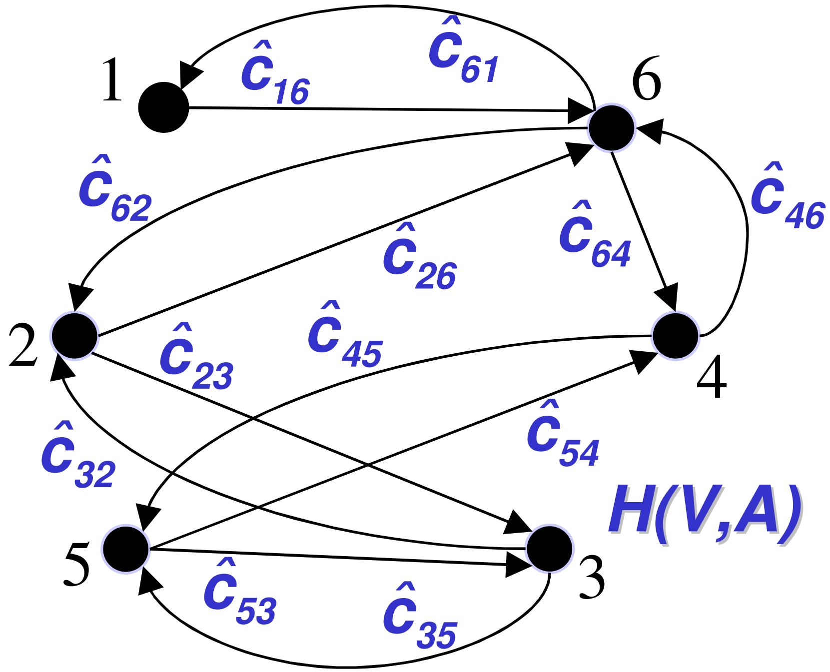
Altrimenti → $\hat{x} \in P$

Separazione disequazioni "taglio"

Dato $\hat{x} \in R^n$

- ***Costruisci*** un grafo orientato ***H(V,A)*** sostituendo ogni arco non orientato ***(u,v)*** di ***G(V,E)*** con la ***coppia di archi orientati (u,v), (v,u)*** di ***H***





- *Per ogni* $uv \in E$ *assegna agli archi di A* ***capacità*** $\hat{c}_{uv} = \hat{c}_{vu} = \hat{x}_{uv}$

- *Per ogni* $K = \delta_G(W)$ taglio di ***G*** $\Rightarrow$ $$\sum_{uv \in \delta_G(W)} \hat{x}_{uv} = \sum_{uv \in \delta_H^+(W)} \hat{c}_{uv} = \hat{c}(W)$$

Separazione disequazioni “taglio” (II)

Esiste un taglio K di G tale che: $\sum_{e \in K} \hat{x}_e < 1$?

- Trova il taglio a ***capacità minima*** $\delta_H^+(W^*)$ di $H(V,A)$
  [risolvendo il problema del ***massimo flusso*** per ogni *coppia s-t* e scegliendo il ***minimo dei tagli minimi s-t***]

Se $\hat{c}(W^*) = \sum_{uv \in \delta_H^+(W^*)} \hat{c}_{uv} \geq 1$

$\Rightarrow$ $\sum_{uv \in \delta_H^+(W)} \hat{c}_{uv} \geq 1$ **per ogni** taglio $\delta_H^+(W)$ di $H(V,A)$

$\Rightarrow$ $\sum_{uv \in \delta_G(W)} \hat{x}_{uv} \geq 1$ **per ogni** taglio $K=\delta_G(W)$ di $G(V,E)$ $\Rightarrow$ $\hat{x} \in P$

Se $\hat{c}(W^*) = \sum_{uv \in \delta_H^+(W^*)} \hat{c}_{uv} < 1$

$\Rightarrow$ $\sum_{uv \in \delta_G(W^*)} \hat{x}_{uv} < 1$ $\Rightarrow$ $K^*=\delta_G(W^*)$ è un *taglio* di G *violato* da $\hat{x}$ $\Rightarrow$ $\hat{x} \notin P$

Metodo del Simplesso Dinamico

Risolve un problema di **Programmazione Lineare**:

$$\min c^T x \; : \; x \in P = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b, \; 1_n \geq x \geq 0_n\}$$

Due ingredienti:

$\hat{x} \in \mathbf{R}^n$

Oracolo di Separazione
di P

$\hat{x} \in P$

$\hat{x} \notin P$
$a_i' \hat{x} > b_i$

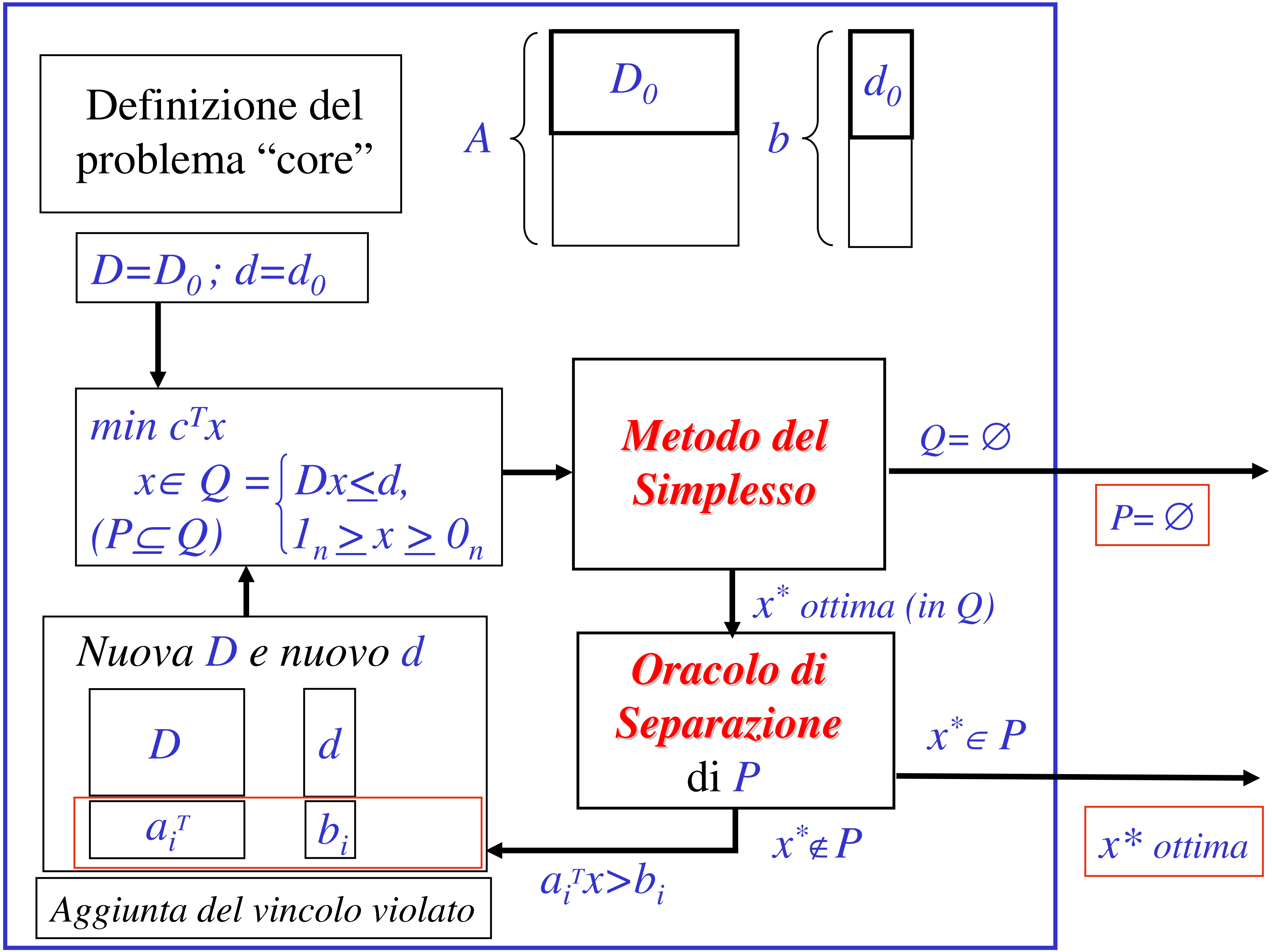
$\min c^T x$
$Ax \leq b,$
$1_n \geq x \geq 0_n$

Metodo del Simplesso

x^* *soluzione ottima*

~~problema illimitato~~

nessuna soluzione ($P = \emptyset$)


Definizione del problema "core"
A
D_0
b
d_0
$D=D_0\,;\ d=d_0$
$\min c^Tx$
$x\in Q=\begin{cases} Dx\le d, \\ 1_n \ge x \ge 0_n \end{cases}$
$(P\subseteq Q)$
Metodo del Simplesso
$Q=\emptyset$
$P=\emptyset$
x^* ottima (in Q)
Oracolo di Separazione di P
$x^*\in P$
x^* ottima
$x^*\notin P$
$a_i^Tx>b_i$
Nuova D e nuovo d
D
d
a_i^T
b_i
Aggiunta del vincolo violato

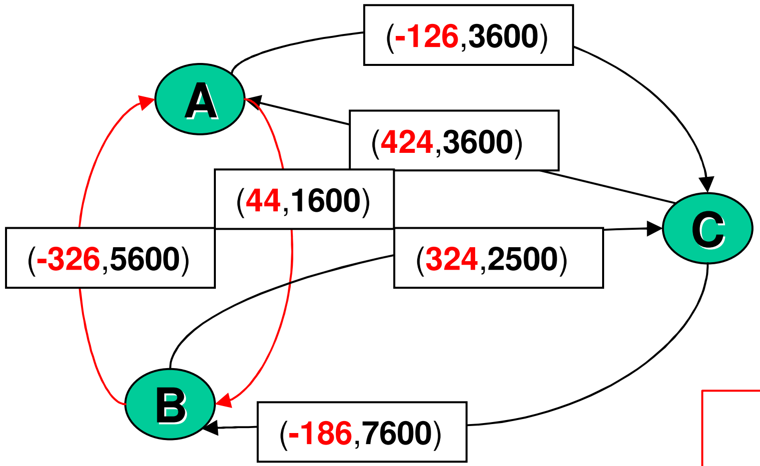
Esempio 2: "grafo senza cicli negativi"

Grafo connesso G(N,A)

c_e costo di un arco $e \in A$

$\mathcal{S}$ = { insiemi di archi che **non** contengono cicli a **costo totale negativo** }

$$\sum_{e \in C} c_e < 0$$



Elementi = archi

Circuito = ciclo (orientato) a costo totale negativo

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \le |C| - 1, & C \text{ ciclo negativo} \\ x_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

Formulazione circuiti

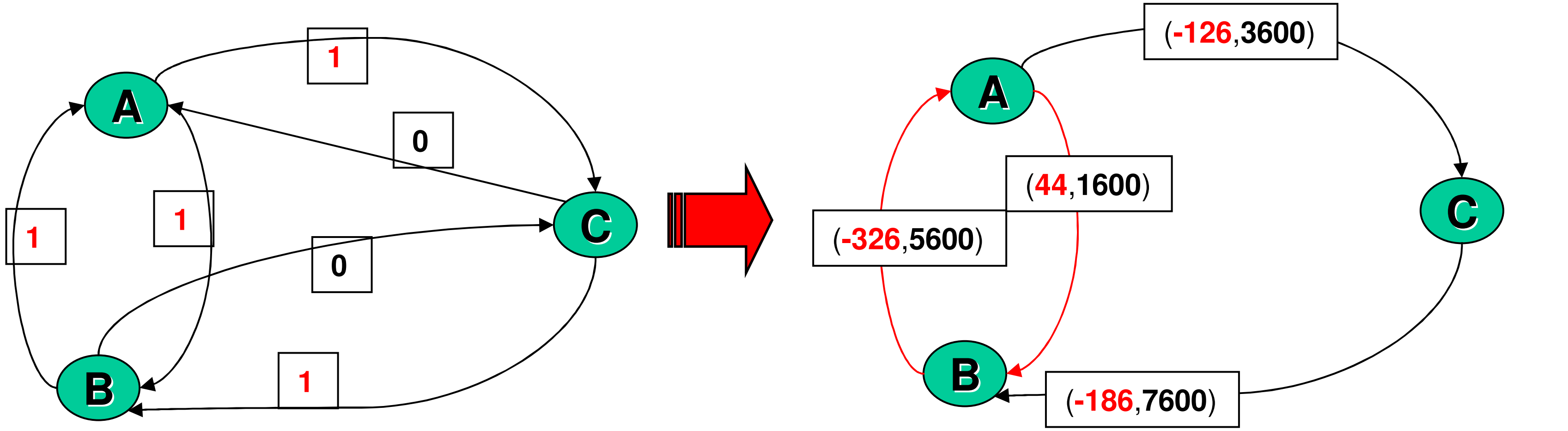
Nel grafo d'esempio

$$\begin{cases} x_{AB} + x_{BA} \le 1 \\ x_{BA} + x_{AC} + x_{CB} \le 2 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Separazione di vettori 0-1 da P_C

Dato: $\hat{x} \in \{0,1\}^{|A|}$ — ***Dato cioè un vettore a componenti 0-1***

- ***Elimina gli archi uv con*** $\boxed{\hat{x}_{uv} = 0}$
- ***Ottieni un grafo (ridotto)*** *con la proprietà che* ***ogni arco uv*** *ha* $\boxed{\hat{x}_{uv} = 1}$



- ***Cerca*** *un ciclo* ***C*** *a costo negativo nel* ***grafo ridotto*** ***(Floyd-Warshall)***

- ***Se esiste*** *allora il vincolo (della formulazione circuiti):* $\sum_{uv \in C} x_{uv} \le |C| - 1$
  è violato da $\hat{x} \in \{0,1\}^{|A|}$ $\quad \left(\sum_{uv \in C} \hat{x}_{uv} = |C| \right)$

- ***Se non esiste*** *allora* $\hat{x} \in P_C$

ORACOLO DI SEPARAZIONE 0-1 per P_C

Lower Bound Intero

Risolve (**Approssima**) un problema di **Programmazione Intera**:

$$\min c^T x : x \in S = P \cap \{0,1\}^n$$

$P = \{x : Ax \le b\}$

Formulazione di S

Due ingredienti:

$\hat{x} \in \{0,1\}^n$ → **Oracolo di Separazione 0-1 per P**

- $\hat{x} \in P$
- $\hat{x} \notin P$

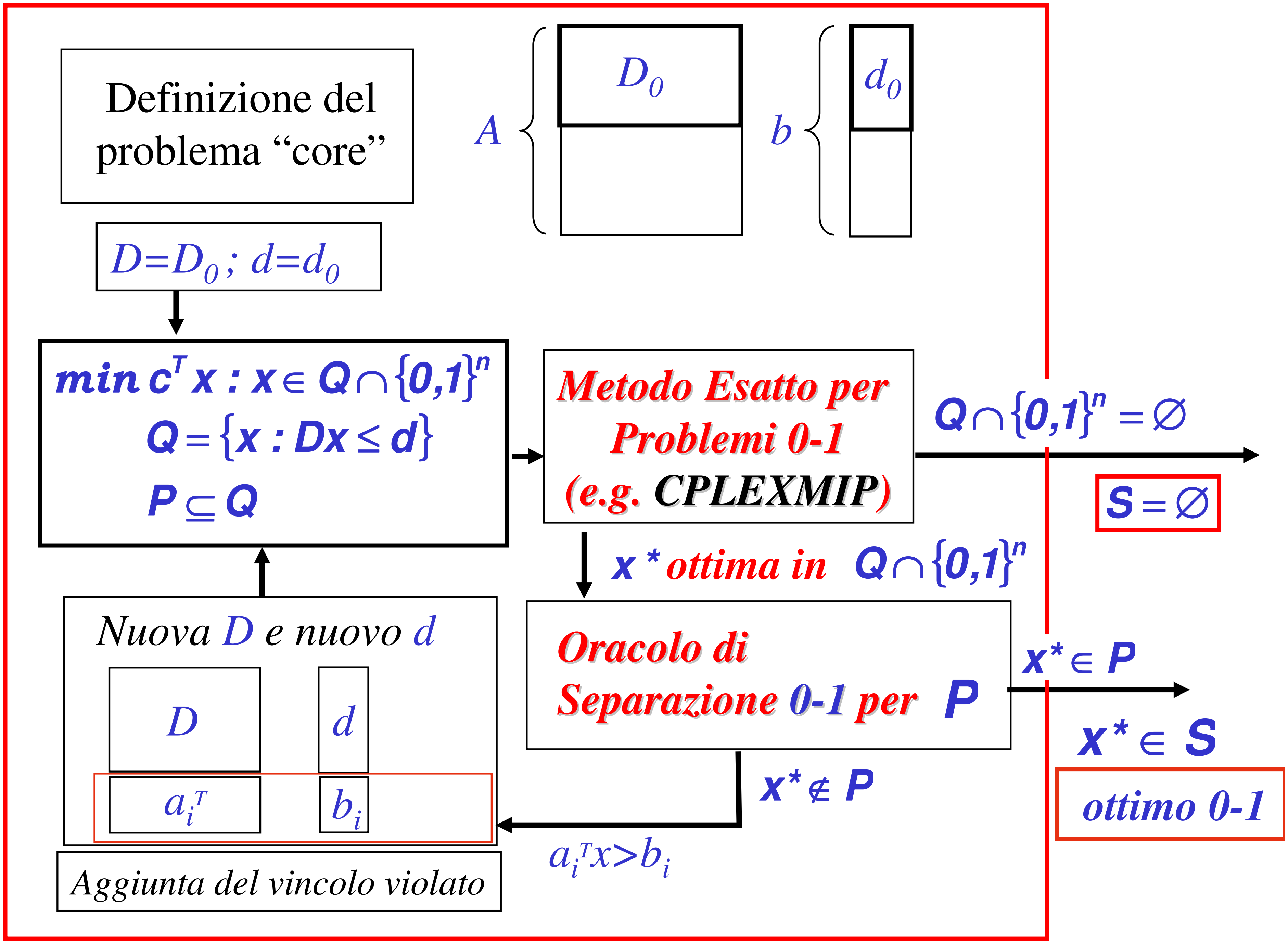
$$A\hat{x} \not\le b \equiv \exists i : \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j > b_j$$

$\min c^T x$

$x \in Q \cap \{0,1\}^n$ → **Metodo Esatto per Problemi 0-1 (e.g. CPLEXMIP)**

- $x^* \in Q \cap \{0,1\}^n$ *(Ottimo 0-1)*
- $Q \cap \{0,1\}^n = \emptyset$

(Q non contiene soluzioni 0-1)



Definizione del problema "core"
A
D_0
b
d_0
$D=D_0\,;\ d=d_0$
$\min c^T x : x \in Q \cap \{0,1\}^n$
$Q = \{x : Dx \le d\}$
$P \subseteq Q$
Metodo Esatto per Problemi 0-1 (e.g. CPLEXMIP)
$Q \cap \{0,1\}^n = \emptyset$
$S = \emptyset$
x^* ottima in $Q \cap \{0,1\}^n$
Oracolo di Separazione 0-1 per P
$x^* \in P$
$x^* \in S$
ottimo 0-1
$x^* \notin P$
$a_i^T x > b_i$
Nuova D e nuovo d
D
d
a_i^T
b_i
Aggiunta del vincolo violato

Soluzione Approssimata (LB)

L'algoritmo dinamico appena illustrato trova la soluzione ottima di un problema di PL01 del quale conosciamo una formulazione

Nulla di strano visto che disponiamo di un **metodo esatto**!

Il vantaggio è quello di non dover utilizzare l'intera formulazione ma di poterla generare in modo dinamico (come nella PL)

Evidentemente il **problema di separazione 0-1** diventerà sempre più difficile da risolvere.

Cosa succede se **arrestiamo l'algoritmo** prima di trovare un vettore $x^* \in P$? Abbiamo calcolato un **Lower Bound**!

Infatti: x^* *ottima in* $Q \cap \{0,1\}^n \; (Q \supseteq P)$

$$c^T x^* \le \min\left\{ c^T x : x \in P \cap \{0,1\}^n \right\}$$

$$LB = c^T x^*$$ **LOWER BOUND**