Ottimizzazione Combinatoria

Flussi, Cammini e Tagli

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma "La Sapienza"

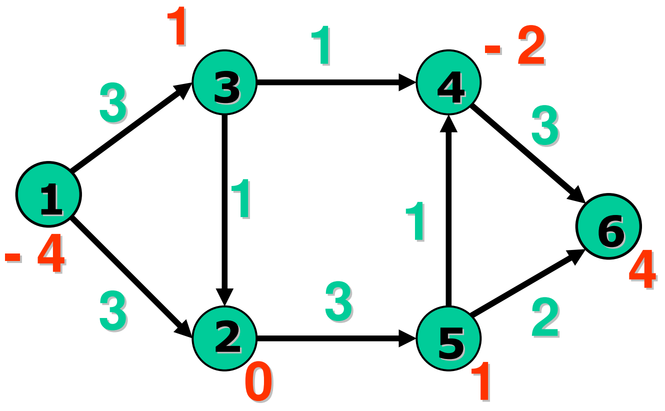
A.A. 2010

Flusso in un grafo orientato

DATI: *Un grafo orientato* $G(N,A)$

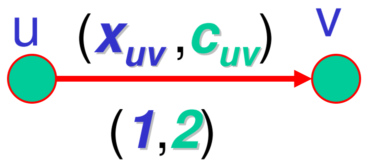
Un vettore capacità $c \geq 0_{|A|}$

Un vettore domanda $d \in R^{|N|}$



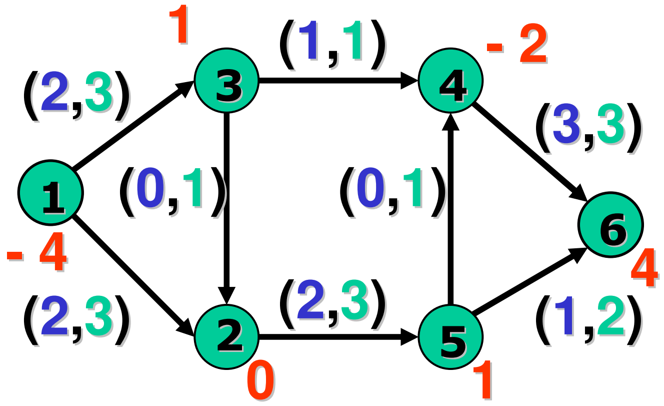
DIREMO: ***FLUSSO*** *di* (G,c,d)

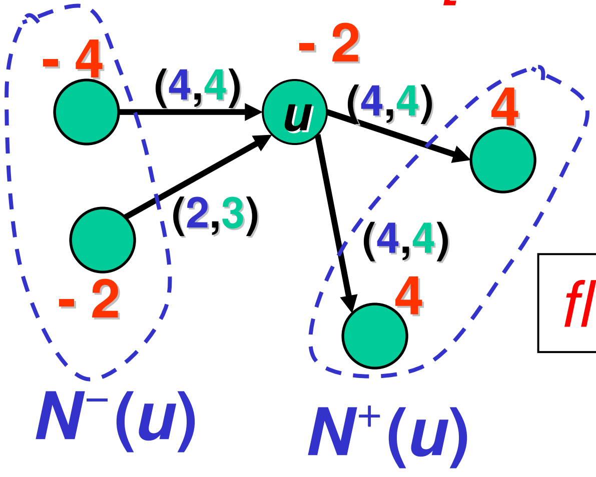
un vettore $x \in R^{|A|}$ tale che:



$$0 \leq x_{uv} \leq c_{uv}$$

[vincolo di capacità]





$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u} - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i} = d_u \quad \forall u \in N$$

flusso entrante - *flusso uscente* = *domanda*

[rete di flusso senza guadagno]

Problema del Flusso di Costo Minimo

DATO: un vettore di **costi associati agli archi** $w \in R^{|A|}$

(MCF)

$$\min \quad w^T x = \sum_{uv \in E} w_{uv} x_{uv}$$

$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u} - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i} = d_u \ , \qquad u \in N$$

$$0 \le x_{uv} \le c_{uv} \ , \qquad uv \in A$$

coefficienti della riga associata al nodo **u**

	$v_i u : v_i \in N^-(u)$			$uv_i : v_i \in N^+(u)$			Archi non incidenti in **u**					
u	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0

riga **u** della matrice di incidenza **M**

$$\text{(MCF)} \quad \begin{array}{c} \min \quad w^T x \\ Mx = d \\ 0_{|A|} \le x \le c \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{c} \min \quad w^T x \\ x \in Q \end{array}$$

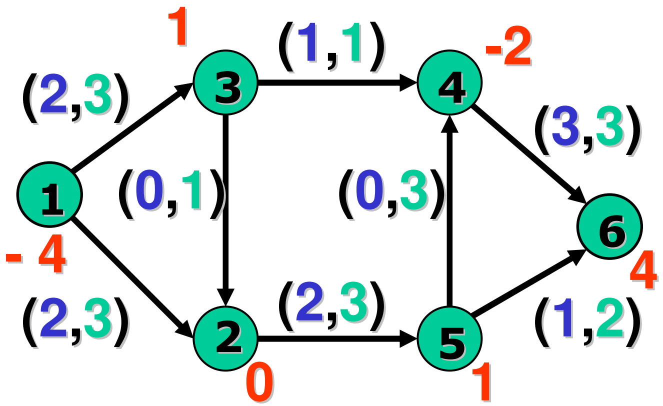
$$Q = \left\{ x : Mx = d, 0_{|A|} \le x \le c \right\}$$

Esempio: Problema di Distribuzione

Un grafo orientato **G(N,A)**

Nodo = Stazione

Arco = Tratta ferroviaria



$c \in R^{|A|}$ = Numero di vagoni disponibili sulla tratta

d_u negativa: Disponibilità del bene misurata in vagoni

d_u positiva: Domanda del bene misurata in vagoni

$w \in R^{|A|}$ = Costo per vagone

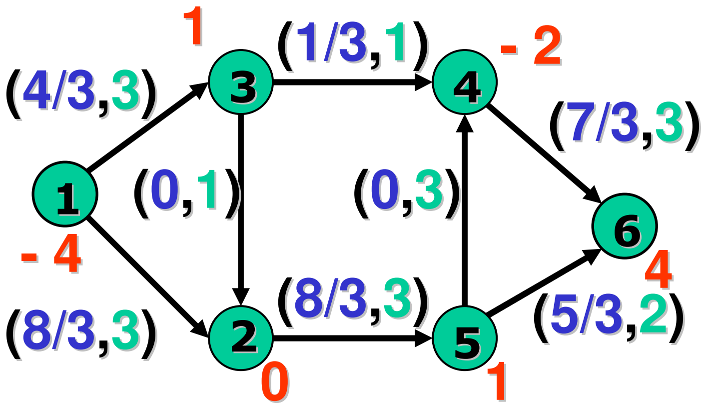
$x \in R^{|A|}$ = Flusso **x_{uv} = Vagoni utilizzati** sulla tratta uv

$\leq$ **c_{uv}** Vagoni disponibili sulla tratta uv

Problema: Trovare $\min\{w^T x : x$ Flusso$\}$

Ma … non tutti i flussi sono accettabili !

Soluzioni frazionarie e intere



x° flusso *frazionario*

$w^T x^\circ$ *non è il vero costo …*

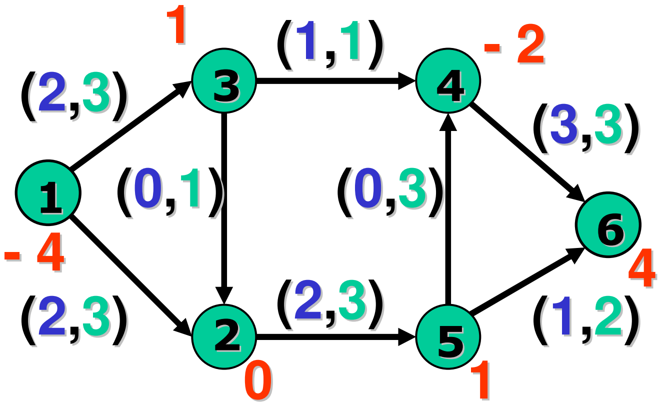
.. il vero costo è $w^T \lceil x^\circ \rceil$

… se occupiamo 4/3 vagoni dobbiamo pagare 2 vagoni

… dobbiamo arrotondare la soluzione x° *ad* $\lceil x^\circ \rceil$

$w^T x^\circ$ *è il costo solo se* x° *ha componenti intere*

Vogliamo flussi interi



Flusso intero di costo minimo

$S = \{ x^1 , x^2 , \dots , x^m \}$

$x^i \in Z^{|A|}$ flusso intero di (G,c,d)

$\min \{ w^T x : x \in S \}$

Problema di Ottimizzazione Combinatoria

$P_S = \mathrm{conv}(S)$

Formulazione

$$Q = \left\{ x \in R^{|A|} : \begin{cases} Mx \le d \\ Mx \ge d \\ Ix \le c \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} M \\ -M \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} d \\ -d \\ c \end{pmatrix}, x \ge 0_n \right\}$$

$P_S = Q$?

Flusso intero di costo minimo (II)

$Q = conv(S)$?

$$Q = \left\{ x \in R^{|A|} : \begin{cases} Mx \le d \\ Mx \ge d \\ Ix \le c \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} M \\ -M \\ I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} d \\ -d \\ c \end{pmatrix}, x \ge 0_n \right\}$$

M TUM ?

Applichiamo il criterio di totale unimodularità con $Q_1=N$ e $Q_2=\varnothing$

$$Q_1\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & \\ & -1 & -1 & & -1 \\ & 1 & & & 1 \\ -1 & & 1 & & \\ \hline \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M \\ -M \\ I \end{bmatrix}$$ **totalmente unimodulare** $\Rightarrow$ **$P_S=Q$**

Ogni vertice di Q ha componenti intere

flusso ⇔ combinazione convessa di flussi interi

Flusso intero di Costo Minimo

(MCF) $\min \quad w^T x = \sum_{uv \in A} w_{uv} x_{uv}$

$$x \in Q$$

$$Q = \{\, x : Mx = d,\ 0_{|A|} \leq x \leq c \,\}$$

Q formulazione ottima

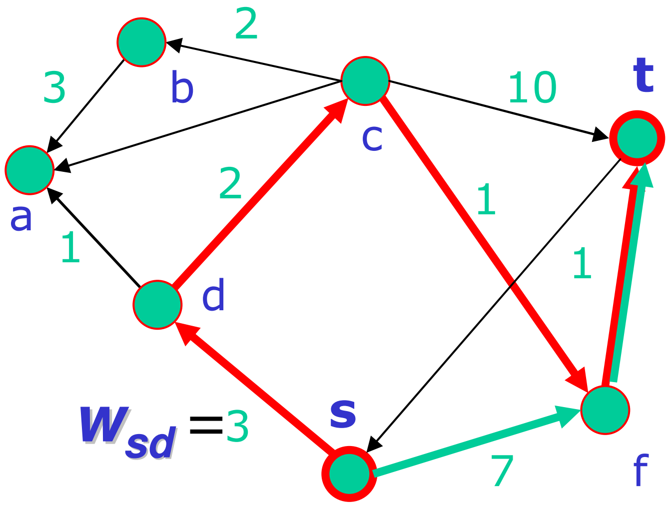
Problema di Programmazione Lineare

ottimo $x^* \in Z^{|A|}$ flusso intero di (G,c,d)

Vediamo due importanti casi particolari

Cammino di costo minimo da s a t

***DATI*:**
- Grafo orientato e connesso **G(N,A)**
- Due nodi speciali ***s*** e ***t***
- ∃ cammino orientato da ***s*** ad ogni ***u*∈*N***
- Costi sugli archi w_{uv} $\forall\, uv \in A$



$w_{sd} = 3$

Costo di un cammino **P di G(N,A)**

$$w(A(P)) = w(P) = \sum_{uv \in A(P)} w_{uv}$$

P={sd,dc,cf,ft}   c(P*)=7*

P={sf,ft}   c(P)=8

TROVARE: *Il CAMMINO ORIENTATO P* da s a t avente COSTO MINIMO*

P*: w(P*) ≤ w(P) ∀ cammino orientato P da s a t di G(N,A)

A volte, per semplicità di notazione, e quando questo non produce confusione denoteremo con P l'insieme A(P)

Vettore di Incidenza di un Cammino

Rappresentazione di un cammino

Definizione:

$x^P \in \{0,1\}^A$ vettore di incidenza di P

$$x^P_{uv} = \begin{cases} 1 & uv \in P \\ 0 & uv \notin P \end{cases}$$

Proprietà di x^P

$$\sum_{us \in \delta^-_G(s)} x^P_{us} = 0 \qquad \sum_{su \in \delta^+_G(s)} x^P_{su} = 1$$

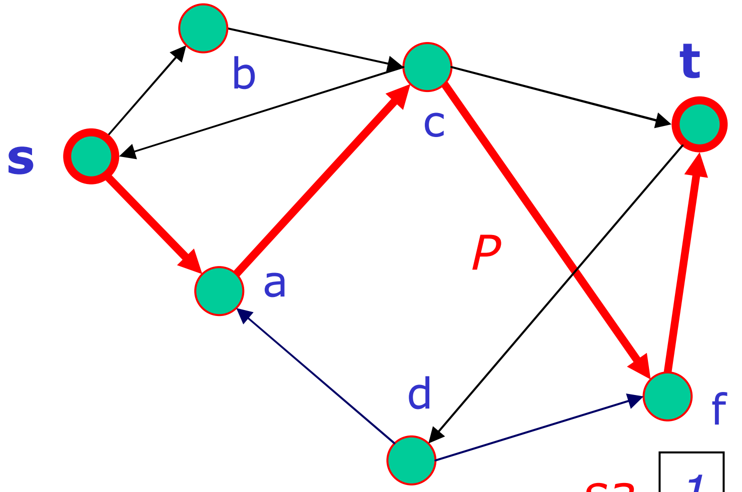
(i) Da s esce un solo arco di un cammino P

$$\sum_{ut \in \delta^-_G(t)} x^P_{ut} = 1 \qquad \sum_{tu \in \delta^+_G(t)} x^P_{tu} = 0$$

(ii) In t entra un solo arco di P

$$\sum_{uv \in \delta^-_G(v)} x^P_{uv} = \sum_{vu \in \delta^+_G(v)} x^P_{vu}$$

(iii) In ogni nodo $v \notin \{s,t\}$
Numero archi di P entranti =
= Numero archi di P uscenti



x^P

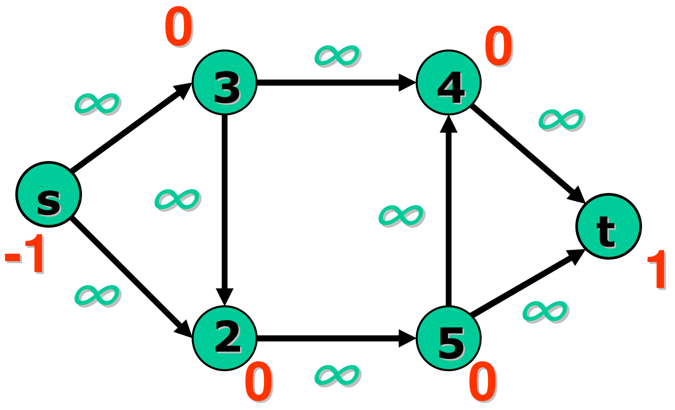
sa	1
sb	0
cs	0
bc	0
ac	1
cf	1
da	0
df	0
td	0
ct	0
ft	1

Flussi 0-1 e Cammini

DATI: Un grafo orientato $G(N,A)$

Un vettore capacità $c = \infty_{|A|}$

Un vettore domanda $d_{st} = \begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array} \end{array}$



$$\min \quad w^T x = \sum_{uv \in A} w_{uv} x_{uv}$$

$$x \in Q_{st}$$

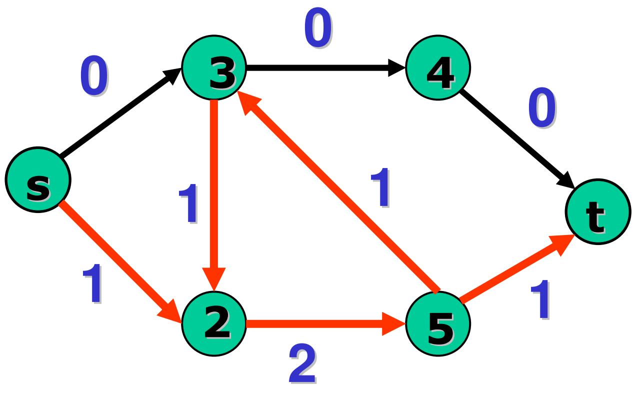
flusso intero di $(G, d_{st}, \infty_{|A|})$

$$Q_{st} = \{\, x : Mx = d_{st},\, x \geq 0_{|A|} \,\}$$

Rappresentazione grafica di $\mathbf{x} \in Q_{st}$ (Supporto)

DEFINIZIONE: Dato un vettore $\mathbf{x}$ diremo SUPPORTO di $\mathbf{x}$ l'insieme di archi $S(\mathbf{x})=\{e \in A: \mathbf{x}_e > 0\}$

Rappresenteremo un vettore $\mathbf{x}$ evidenziando gli archi del supporto (ad es. in rosso) e (a volte) indicando il valore della componente di $\mathbf{x}_e$ accanto all'arco e



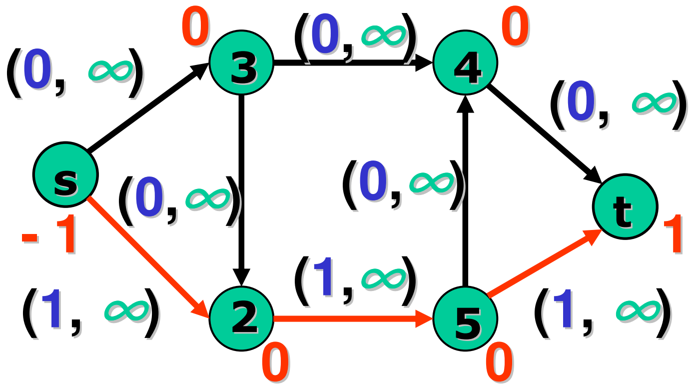
$$\equiv \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} s3 \\ s2 \\ 32 \\ 25 \\ 53 \\ 34 \\ 4t \\ 5t \end{array}$$

Vettore di incidenza di un cammino ⇒ flusso intero

$\mathbf{x}^P$ vettore di incidenza di un *cammino orientato* **P**

(i) da s esce un solo arco di **P**

(ii) in t entra un solo arco di **P**



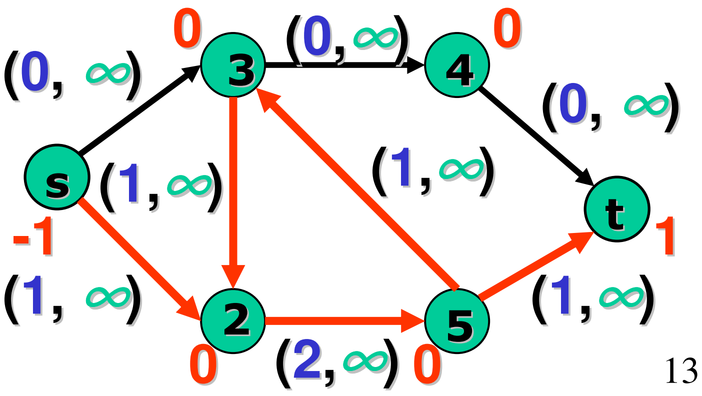
(iii) In ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

- *un arco di* **P** *entrante e un arco di* **P** *uscente* ***OPPURE***
- *nessun arco di* **P** *entrante o uscente*

⇒ $\mathbf{x}^P$ flusso intero di $(G, d_{st}, \infty_{|A|})$

Viceversa?

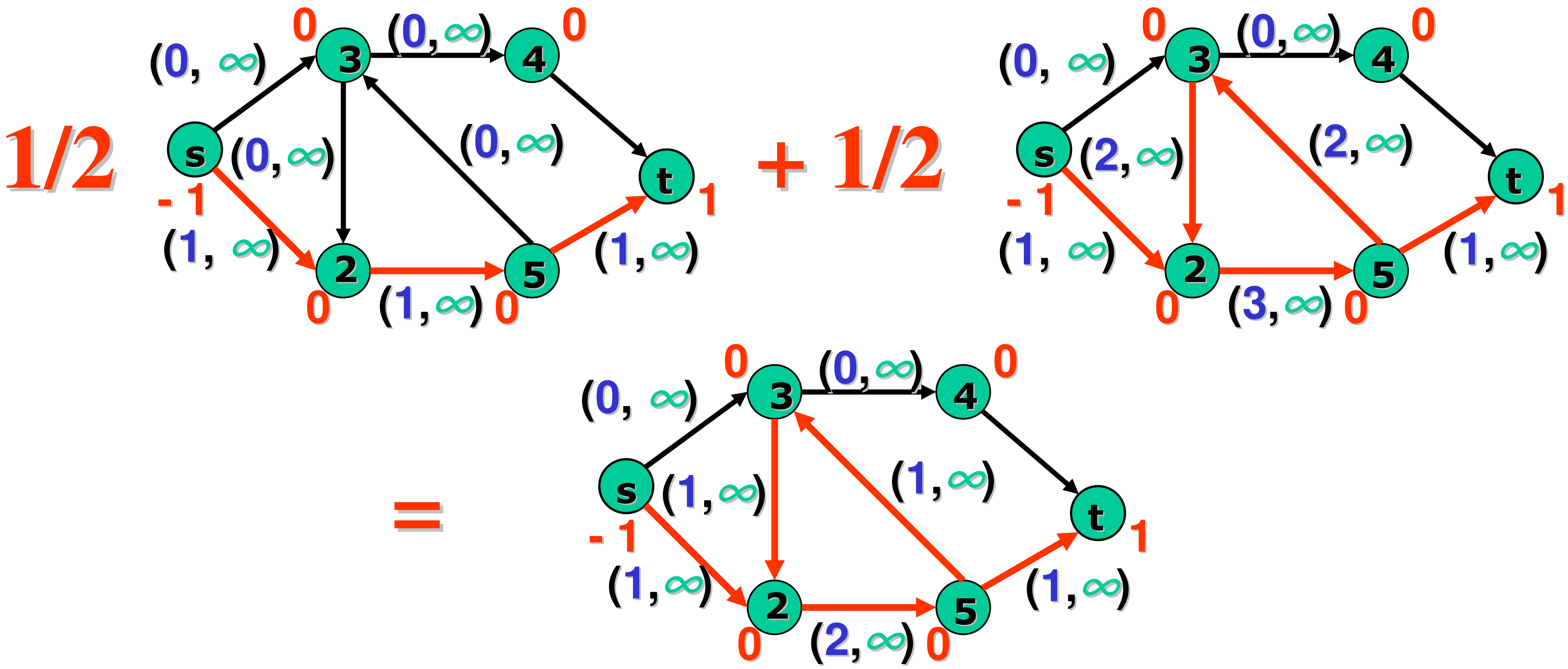
No! ⇒



Flussi interi e vertici di Q_{st}

I vertici di Q_{st} *sono (flussi) interi (**M** totalmente unimodulare)*

ma … non tutti i flussi a componenti intere $x \in Q_{st}$ *sono vertici*

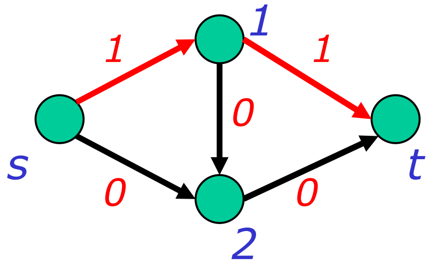


E allora … quali sono i vertici di Q_{st} *?* ***(SBA)***

Vettori del Poliedro dei Cammini (Esempi)

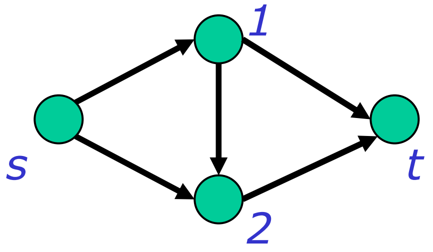
$$Q_{st} = \{\, x \in \Re^{|A|} : \; Mx=b, \;\; x \geq 0_{|A|} \,\}$$

$$x^P \begin{array}{c|c} s1 & 1 \\ s2 & 0 \\ 12 & 0 \\ 1t & 1 \\ 2t & 0 \end{array}$$



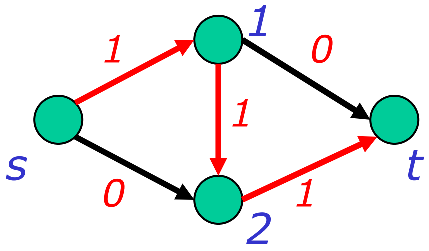
P cammino s-t

$x^P \in Q_{st}$



$$\begin{array}{l} -x_{s1} - x_{s2} = -1 \\ x_{1t} + x_{2t} = 1 \\ x_{s1} - x_{12} - x_{1t} = 0 \\ x_{s2} + x_{12} - x_{2t} = 0 \end{array}$$

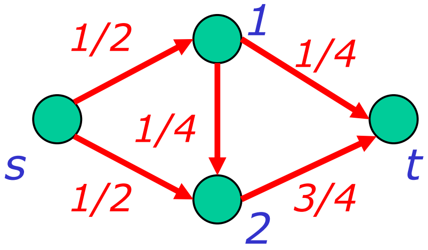
$$x^{P'} \begin{array}{c|c} s1 & 1 \\ s2 & 0 \\ 12 & 1 \\ 1t & 0 \\ 2t & 1 \end{array}$$



P′ cammino s-t

$x^{P'} \in Q_{st}$

$$\hat{x} \begin{array}{c|c} s1 & 1/2 \\ s2 & 1/2 \\ 12 & 1/4 \\ 1t & 1/4 \\ 2t & 3/4 \end{array}$$



$\hat{x} \in Q_{st}$

Non è un cammino !

Soluzioni Ammissibili di Base (SBA)

$Q_{st} = \{ x : Mx = d_{st} , x \geq 0_{|A|} \}$ Poliedro dei cammini da s a t

$|A|=n ; |N|=m$ $n \geq m-1$ [**G** connesso contiene un albero ricoprente]

rango(**M**) = m-1 [Teorema] ⇒ **una riga di M ridondante**

$$Mx = \begin{bmatrix} \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{\vdots} \\ \vdots \\ uv \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_{st} \Rightarrow b'_{st} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo **eliminare la prima riga** ottenendo la matrice M'

Base B sottomatrice (m-1× m-1) non-singolare di M'

Vertice (SBA) ⇒ $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1} b'_{st} \\ 0_{n-m+1} \end{pmatrix} \geq 0_n$

Soluzioni di Base

TEOREMA F1: $x' \in \mathbf{Q}_{st}$ è una Soluzione di Base (SBA) se e solo se $S(x')=\{e \in A: x'_e > 0\}$ (supporto di x') è una FORESTA di $G(N,A)$

DIMOSTRAZIONE:

Vertice (SBA) $$x' = \begin{pmatrix} B^{-1}b'_{st} \\ 0_{n-m+1} \end{pmatrix} \geq 0_n$$

⇔ **B** sottomatrice $(m-1 \times m-1)$ non-singolare di **M**

⇔ Gli archi T_B corrispondenti alle colonne di **B** definiscono un ALBERO RICOPRENTE

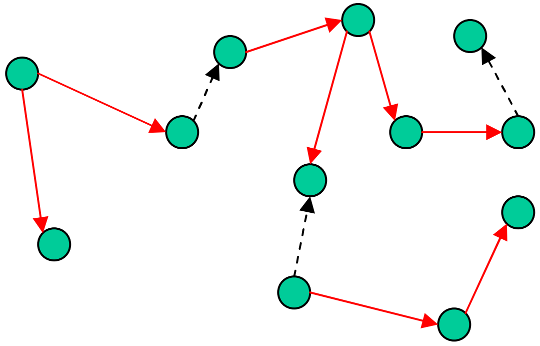
Quindi: se x' è una SOLUZIONE DI BASE

x' è una soluzione di base NON-DEGENERE $\Rightarrow$ $S(x') = T_B \Rightarrow$ $S(x')$ Albero

x' è una soluzione di base DEGENERE $\Rightarrow$ $S(x') \subset T_B \Rightarrow$ $S(x')$ Foresta

Viceversa: se $S(x')$ FORESTA

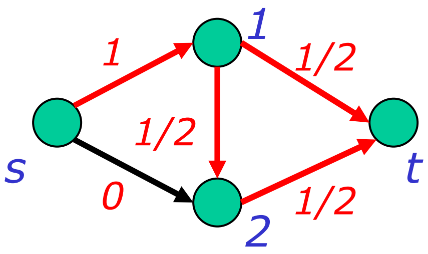
G(N,A) connesso → $\exists$ albero ricoprente $T \supseteq S(x')$



La sottomatrice **B** di **M** le cui colonne corrispondono agli archi di T (e le cui righe sono $m-1$ righe di **M**) è non-singolare $\Rightarrow$ $T=T_B$

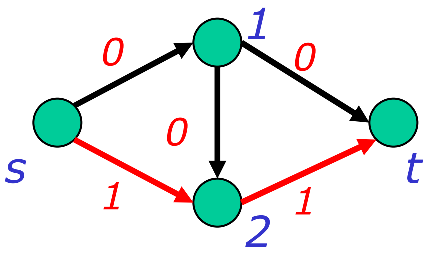
T_B ALBERO RICOPRENTE → $x' \in \mathbf{Q}_{st}$ Soluzione di Base

Soluzioni di Base



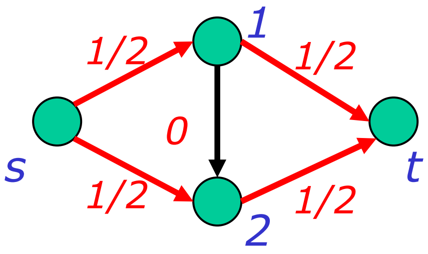
$x' \in \mathbf{Q}_{st}$

SOLUZIONE NON DI BASE



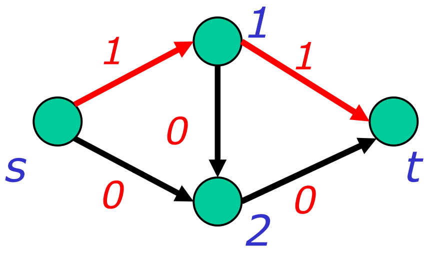
$x' \in \mathbf{Q}_{st}$

SOLUZIONE DI BASE



$x' \in \mathbf{Q}_{st}$

SOLUZIONE NON DI BASE



$x' \in \mathbf{Q}_{st}$

SOLUZIONE DI BASE

Soluzioni di Base e Cammini

TEOREMA F2: $x' \in \mathbf{Q}_{st}$ è una **SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE** se e solo se è *VETTORE DI INCIDENZA DI UN CAMMINO ORIENTATO* **P** da **s** a **t**.

DIMOSTRAZIONE:

x′ è una **SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE**

⟺ Gli archi in **S**(**x′**) definiscono una **FORESTA H(N,S(x′))** di **G(N,A)**

[Teorema F1]

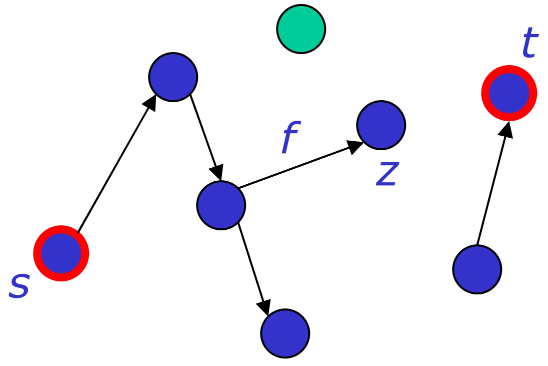
Sia z una foglia di H diversa da s e t e sia $f \in S(x')$ l'unico arco incidente su z

L'equazione del sistema $\mathbf{M}x' = b$ corrispondente a z sarà:

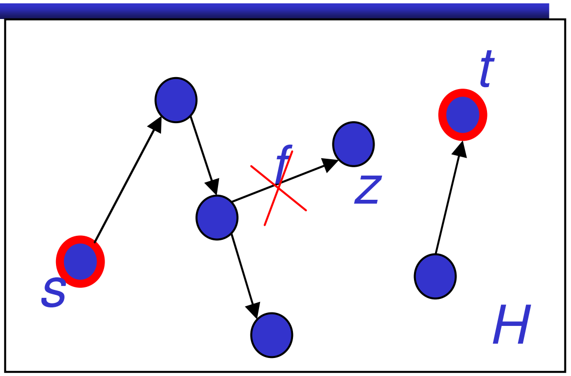
$$\begin{cases} x'(\delta^-_G(z)) - x'(\delta^+_G(z)) = x_f' = 0 & \text{se } f \in \delta^-_G(z) \\ x'(\delta^-_G(z)) - x'(\delta^+_G(z)) = -\,x_f' = 0 & \text{se } f \in \delta^+_G(z) \end{cases}$$

Contraddicendo l'ipotesi che $f \in S(x')$

⟹ Nessun nodo $z \neq s,t$ è una foglia di H



Teorema F2 (...)

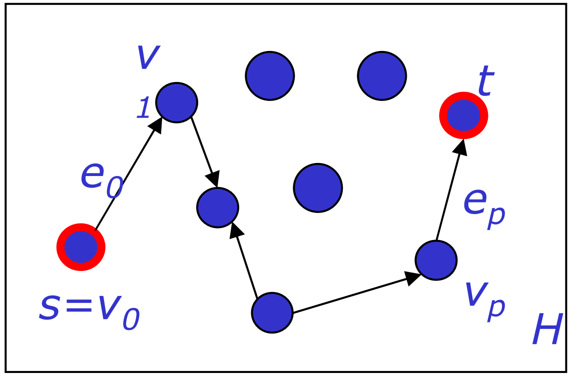


Quindi: *Nessun nodo $z \neq s,t$ è una foglia di H*

Ma ***H*** *è una foresta e ogni sua componente connessa che contiene un arco ha* ***almeno*** *due foglie*

$\Rightarrow$ ***H*** *ha solo due foglie s e t*

$\Rightarrow$ ***H*** *ha una sola componente connessa con un arco*



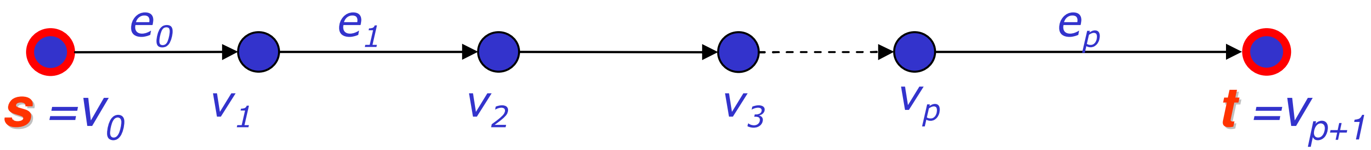
Ovvero: ***H è*** *un CAMMINO P CON ESTREMI s e t (più nodi isolati)*

$P=(\mathbf{s}=v_0,e_0,v_1,e_1,v_2,\ldots,v_p,e_p,\mathbf{t}=v_{p+1})$

Ma $\mathbf{x'} \in \mathbf{Q_{st}}$ *ed è quindi un flusso intero*

In ogni nodo $\mathbf{z} \neq \mathbf{s,t}$ *ho un arco entrante e uno uscente*

$\mathbf{x'}$ ***è il vettore di incidenza di un cammino orientato da s a t***



Cammini Minimi e Programmazione Lineare

TROVARE: *Il CAMMINO ORIENTATO P^* da s a t avente COSTO MINIMO*

$$w(P)=\sum_{uv\in A(P)} w_{uv} = \sum_{uv\in A} w_{uv}\, x^P_{uv} = w^T x^P$$

TROVARE: *Un VETTORE DI INCIDENZA x^P di un CAMMINO ORIENTATO P da s a t avente COSTO MINIMO w^Tx^P*

[Teorema F1]

TROVARE: *Una SOLUZIONE DI BASE (VERTICE) x del Poliedro*

$\mathbf{Q}_{st}=\{\mathbf{x}\in \Re^{|A|}:\ \mathbf{Mx=b},\ \mathbf{x}\geq 0_{|A|}\}$ *avente COSTO MINIMO w^Tx*

[Teoria della Programmazione Lineare]

RISOLVERE IL PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE:

$$\begin{array}{lll} \textbf{(CM)}\ \min \mathbf{w}^T\mathbf{x} & & \min \mathbf{w}^T\mathbf{x} \\ \qquad \mathbf{Mx=b} & \equiv & \mathbf{x}\in \mathbf{Q}_{st} = \left\{ \mathbf{x}\in \Re^{|A|}:\ \mathbf{Mx=b},\ \mathbf{x}\geq 0_{|A|} \right\} \\ \qquad \mathbf{x}\geq 0_{|A|} & & \end{array}$$

*Il METODO DEL SIMPLESSO individua la soluzione di base (vertice) avente **costo minimo**.*

Problema Primale e Problema Duale

PROBLEMA PRIMALE:

(CM) $\min c^T x$

$Mx = b$

$x \geq 0_{|A|}$

$$\begin{array}{c|ccc} & & uv & \\ \hline & & 0 & \\ u & & -1 & \\ & & 0 & \\ v & & 1 & \\ & & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1 & t \\ -1 & s \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}$$

M **b**

PROBLEMA DUALE:

(DCM) $\max b^T y$

$M^T y \leq c$

$$\begin{array}{ccccc} t & s & & & \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

b^T

$$\begin{array}{c|ccccc} & & u & & v & \\ \hline & & & & & \\ uv & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}$$

M^T

PROBLEMA DUALE:

(DCM) $\max y_t - y_s$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

rango(**M**)=n-1 → Una (qualunque) riga di **M** è ridondante

Possiamo eliminare la riga corrispondente ad s e porre $y_s = 0$

Esempi di soluzioni primali e duali

PROBLEMA PRIMALE:

(CM) $\min c^T x$

$Mx=b$

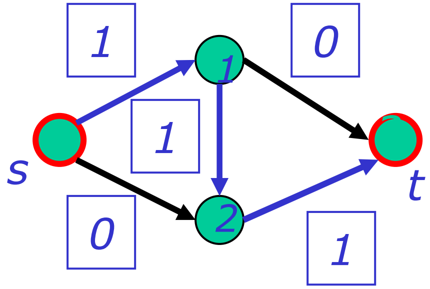
$x \geq 0_{|A|}$

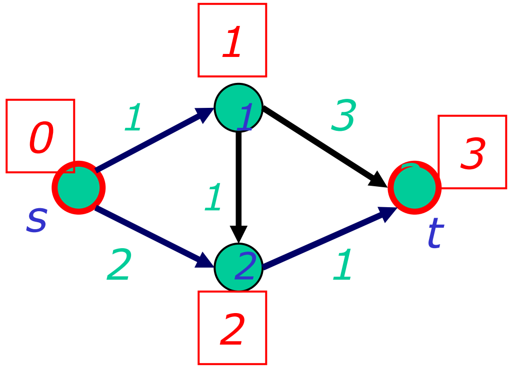
PROBLEMA DUALE:

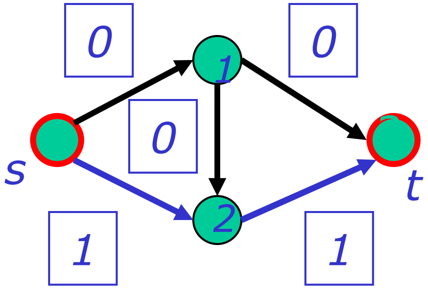
(DCM) $\max y_t$

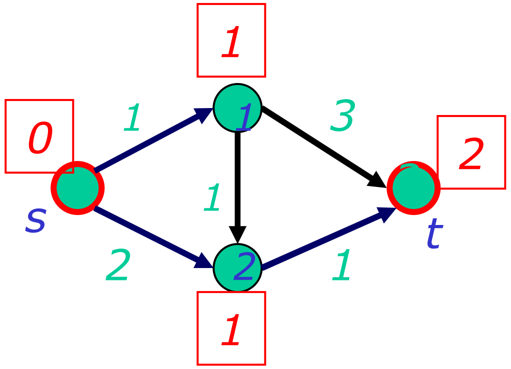
$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

$y_s=0$









Ammissibilità e Limitatezza

PROBLEMA PRIMALE:

(CM) $\min c^T x$

$Mx = b$

$x \geq 0_{|A|}$

PROBLEMA DUALE:

(DCM) $\max y_t$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

$y_s = 0$

IPOTESI

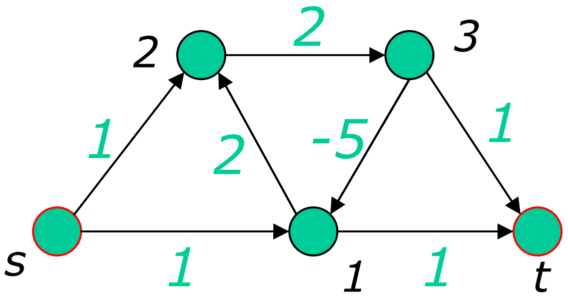
Esiste un cammino orientato da s a t

➡ Il problema primale ammette sempre una soluzione

Il problema primale può essere illimitato inferiormente ?

ovvero: il problema duale può non ammettere soluzioni ?

ESEMPIO



$$\begin{aligned} y_1 &\leq 1 \\ y_2 &\leq 1 \\ y_3 - y_2 &\leq 2 \\ y_1 - y_3 &\leq -5 \\ y_2 - y_1 &\leq 2 \\ y_t - y_3 &\leq 1 \\ y_t - y_1 &\leq 1 \end{aligned}$$

non ammette soluzioni !

Condizione di Limitatezza

TEOREMA F3: Il Problema Duale ammette soluzioni (il Problema Primale non è illimitato) se e solo se il grafo G(N,A) non ha cicli orientati di costo totale negativo.

DIMOSTRAZIONE: (parte se) Se G(N,A) non contiene cicli con costo negativo

Sia P^*_u il cammino di lunghezza minima da s ad un generico nodo $u \in N-\{s\}$ [s è fortemente connesso ad ogni u]

Poni $y'_u = c(P^*_u)$ per ogni $u \in N-\{s\}$

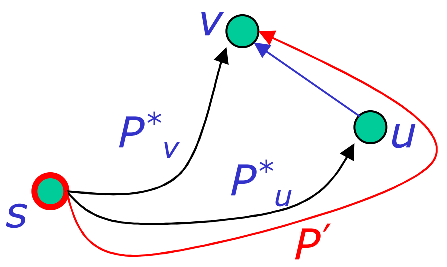
Se $y'_v - y'_u \le c_{uv}$ per ogni $uv \in A$ **y'** è una soluzione duale

Se, invece, $y'_v - y'_u > c_{uv}$ per qualche $uv \in A$

⇒ $c(P^*_v) - c(P^*_u) > c_{uv}$ ⇒ $c(P^*_v) > c(P^*_u) + c_{uv}$

Se v non appartiene a $P^*_u = (s, \dots, u)$

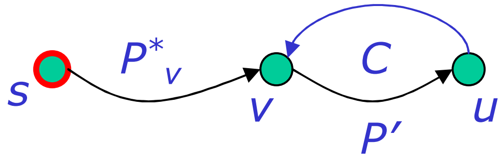
⇒ $P' = (s, \dots, u, uv, v)$ è un cammino con:
$c(P') = c(P^*_u) + c_{uv} < c(P^*_v)$ CONTRADDIZIONE



Quindi: v appartiene a $P^*_u = (s, \dots, u)$

Detto $P' = (v, \dots, u)$ il sotto-cammino di P^*_u da v ad u

⇒ $C = P' \cup \{uv\}$ è un ciclo



$c(P^*_v) > c(P^*_v) + c(P') + c_{uv}$ ⇒ $0 > c(P') + c_{uv} = c(C)$

CICLO NEGATIVO !

Condizione di Limitatezza (…)

(parte solo se) Se **y’** è una soluzione duale → G(N,A) non contiene cicli negativi

Supponi (per assurdo) che C=(1,12,2,…,k,k1,1) sia un ciclo di G(N,A) avente costo totale c(C) negativo.

Poichè **y’** è una soluzione duale abbiamo:

$y_2' - y'_1 \leq c_{12}$

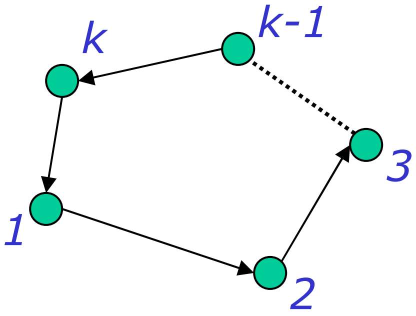
$y_3' - y'_2 \leq c_{23}$

⋮

$y_1' - y'_k \leq c_{k1}$

+

$0 \leq c(C)<0$



CONTRADDIZIONE

■

Condizioni di Scarto Complementare

PROBLEMA PRIMALE:

(CM) $\min c^T x$

$Mx=b$

$x \geq 0_{|A|}$

PROBLEMA DUALE:

(DCM) $\max y_t$

$y_v - y_u \leq c_{uv}$ per ogni $uv \in A$

$y_s = 0$

x' soluzione del primale

y' soluzione del duale

CONDIZIONI DI SCARTO COMPLEMENTARE

(x',y') sono OTTIME per i rispettivi problemi se e solo se:

$x'_{uv}(c_{uv} - y'_v + y'_u) = 0$ per ogni $uv \in A$

x^* VETTORE DI INCIDENZA DI UN CAMMINO P^* è OTTIMO

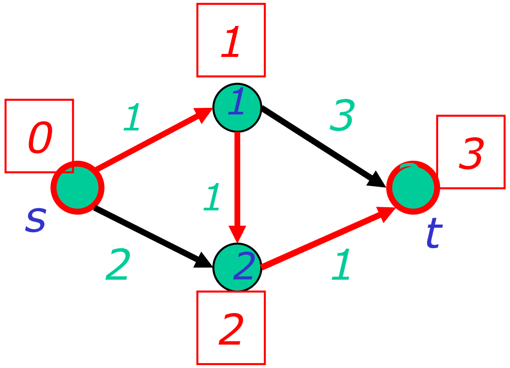
Se e solo se esiste una soluzione duale y^* tale che:

$y^*_v = y^*_u + c_{uv}$ per ogni $uv \in A$ con $x^*_{uv} = 1$ $(uv \in P^*)$

Esempio

IL VETTORE DI INCIDENZA DEL CAMMINO (s,s1,1,12,2,2t,t) è OTTIMO ?

Ovvero: il CAMMINO (s,s1,1,12,2,2t,t) è di LUNGHEZZA MINIMA ?



$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

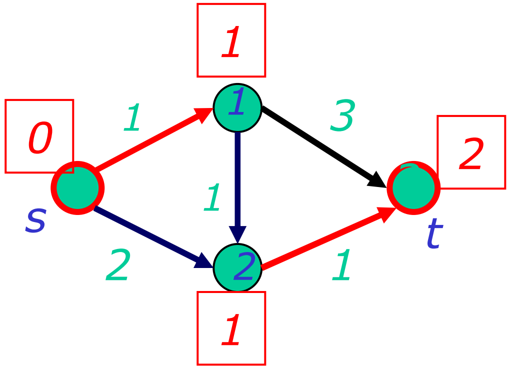
$y'_2 - y'_1 = 2\text{-}1=1=c_{12}$

$y'_t - y'_2 = 3\text{-}2=1=c_{2t}$

$y'_2 - y'_s = 2\text{-}0=2=c_{s2}$

CERTIFICATO DI OTTIMALITA'

SOLUZIONE DUALE NON-OTTIMA
(non e' un certificato di ottimalita')



$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

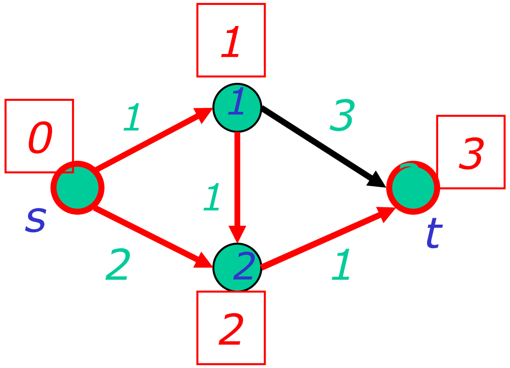
$y'_t - y'_2 = 2\text{-}1=1=c_{2t}$

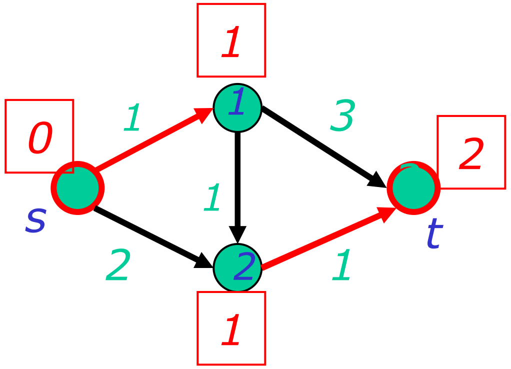
Grafo Ridotto

DEFINIZIONE: *Data una soluzione duale* y' *diremo GRAFO RIDOTTO rispetto ad* y' *il grafo* $G(y')$ (N,F') con $F'=\{uv\in A : y'_v = y'_u + c_{uv}\}$

G(y′) è il sottografo ricoprente di G(N,A) definito dagli archi associati ai vincoli duali $y_v - y_u \leq c_{uv}$ *soddisfatti all'uguaglianza da* y'

$$y'_v - y'_u = c_{uv} \Leftrightarrow uv \in F'$$





$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

$y'_2 - y'_1 = 2\text{-}1=1=c_{12}$

$y'_t - y'_2 = 3\text{-}2=1=c_{2t}$

$y'_2 - y'_s = 2\text{-}0=2=c_{s2}$

$y'_1 - y'_s = 1\text{-}0=1=c_{s1}$

$y'_t - y'_2 = 2\text{-}1=1=c_{2t}$

Condizione di Ottimalità

TEOREMA F4: Un *cammino orientato* *P* da *s* a *t* in *G(N,A) ha costo minimo* *<u>se e solo se</u>* esiste una *soluzione duale y'* con la proprietà che *P* è un *cammino* orientato da *s* a *t* nel *grafo ridotto G(y')*.

DIMOSTRAZIONE:

Sia *P* un cammino orientato da *s a t* in *G(N,A)*

Sia x^P *il suo vettore di incidenza*

x^P è *OTTIMO* *<u>se e solo se</u>* *[CONDIZIONI DI SCARTO COMPLEMENTARE]*

Esiste una soluzione duale y': $x^P_{uv}(c_{uv}-y'_v+y'_u)=0$ per ogni *uv*

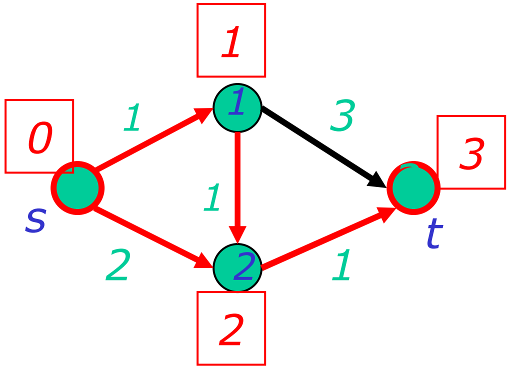
Esiste y': $y'_v = y'_u+c_{uv}$ per ogni $uv \in P$ $(x^P_{uv}=1)$

⟺

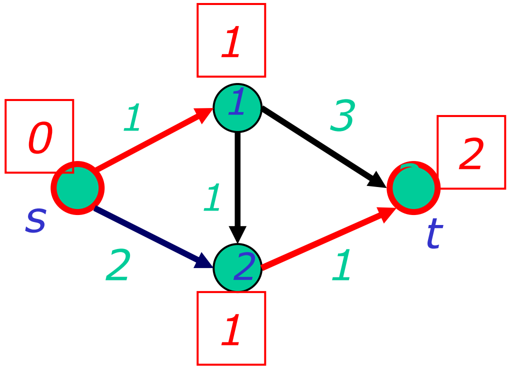
P cammino orientato da *s a t* in *G(y')*

■

ESEMPI

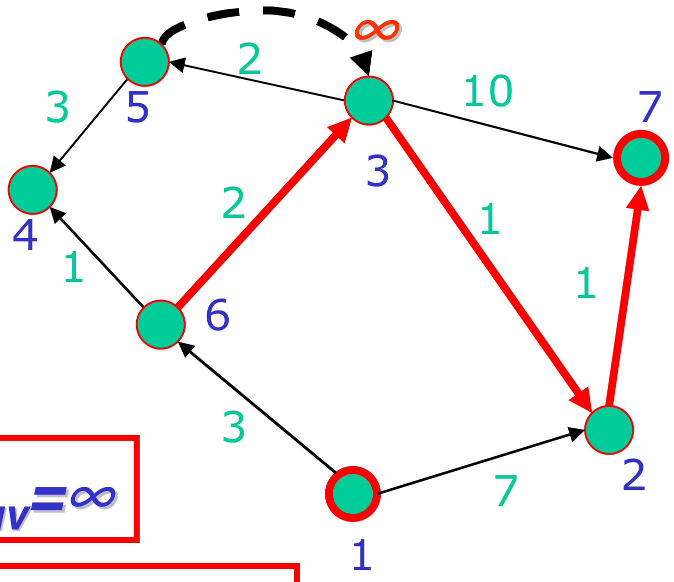


y' ottima



y' non-ottima

Algoritmo di Floyd-Warshall



DATI:

- Grafo orientato e connesso **G(N,A)**
- Costi sugli archi w_{uv} $\forall uv \in A$

TROVARE: il **cammino orientato di costo minimo** tra **ogni coppia di nodi**

Aggiungiamo gli archi $uv \notin A$ ponendo $w_{uv}=\infty$

Esiste un cammino orientato tra ogni coppia di nodi

Il problema del cammino minimo ammette sempre una soluzione

DEFINIZIONE: **posto** $N = \{1,2,\dots,n\}$

Sia: $P_{ij}^{d} = (i,k_1,k_2,\dots,k_q,j)$, $k_h \in N_d = \{1,2,\dots,d\}$

il **cammino minimo** tra ***i*** e ***j*** con **nodi interni solo** nell'insieme N_d

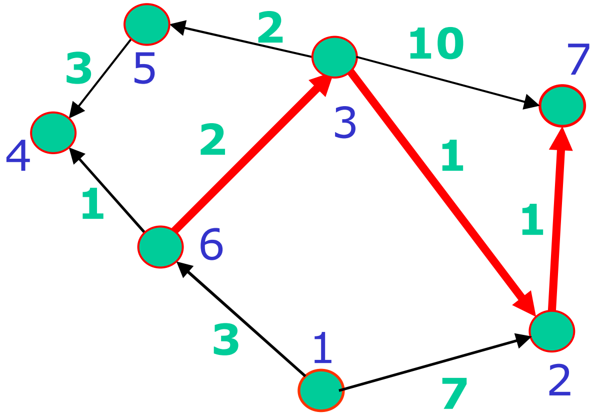
Es: $N_3 = \{1,2,3\}$ $P_{67}^{3} = (6,3,2,7)$, $P_{53}^{3} = (5,3)$

Algoritmo di Floyd-Warshall (II)

Sia: $P_{ij}^{d} = \left(i, k_1, k_2, \dots, k_q, j\right), \quad k_h \in N_d = \{1,2,\dots,d\}$

il **cammino minimo** tra **i** e **j** con **nodi interni solo** nell'insieme N_d

d_{ij}^{k} **costo del cammino minimo** P_{ij}^{k}



$$D^k = [d_{ij}^{k}]_{i,j=1,\dots,n}$$

$$D^0 = [w_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$$

D^n costi dei **cammini minimi** tra **i** e **j** con **nodi interni** nell'insieme **N**

Matrice dei costi dei cammini minimi

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 2 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 1 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

ALGORITMO:

$$D^0 \rightarrow D^1 \cdots \rightarrow D^{k-1} \rightarrow D^k \cdots \rightarrow D^n$$

Algoritmo di Floyd-Warshall (III)

Semplice formula per passare dalla matrice …

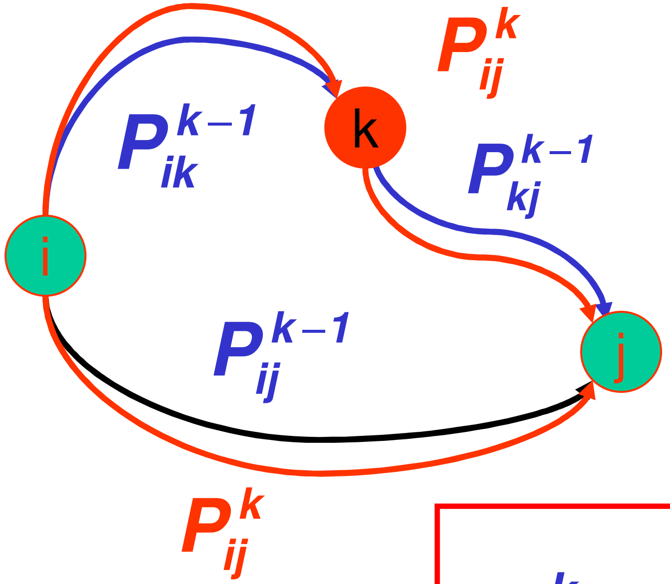
$$D^{k-1} = [d_{ij}^{k-1}]_{i,j=1,..,n}$$

costi dei cammini minimi che utilizzano i nodi $N_{k-1} = \{1,2,\ldots,k\text{-}1\}$

alla matrice …

$$D^{k} = [d_{ij}^{k}]_{i,j=1,..,n}$$

costi dei cammini minimi P_{ij}^{k} *che utilizzano i nodi* $N_{k} = \{1,2,\ldots,k\}$



due possibili casi:

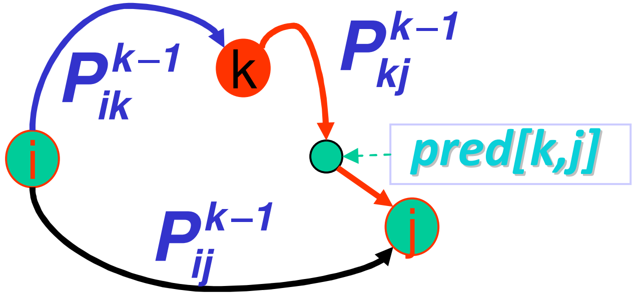
- P_{ij}^{k} *non utilizza* il nodo *k*
- P_{ij}^{k} *utilizza* il nodo *k*

$$d_{ij}^{k} = \min\left\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

Algoritmo di FLOYD-WARSHALL

Inizializzazione

```
For i:=1 to n
    For j:=1 to n
        do begin
            D[i,j]:=w(i,j);
            pred[i,j]:=i;
        end;
```

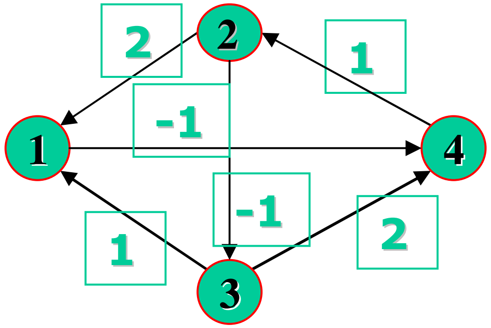


```
For k:=1 to n
    For i:=1 to n
        For j:=1 to n
        do begin
          if  D[i,j]>D[i,k]+D[k,j]
          then begin
             D[i,j]:= D[i,k]+D[k,j];
             pred[i,j]:= pred[k,j];
          end;
        end;
```

pred[i,j] — **Predecessore di j nel cammino tra i e j**

D[i,i]<0 — **Ciclo negativo che passa per il nodo i**

Algoritmo di Floyd-Warshall: Esempio



$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 2 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

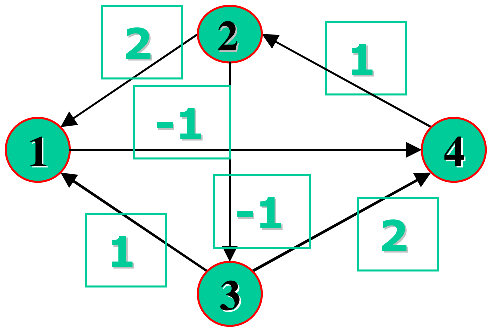
$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$pred = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Floyd-Warshall: Esempio



$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad pred = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Come si ricostruisce il cammino minimo tra i e j ?

Es. P_{13}

Si parte dal nodo 3 e si cerca il predecessore …

$$pred\,(1,3) = 2$$

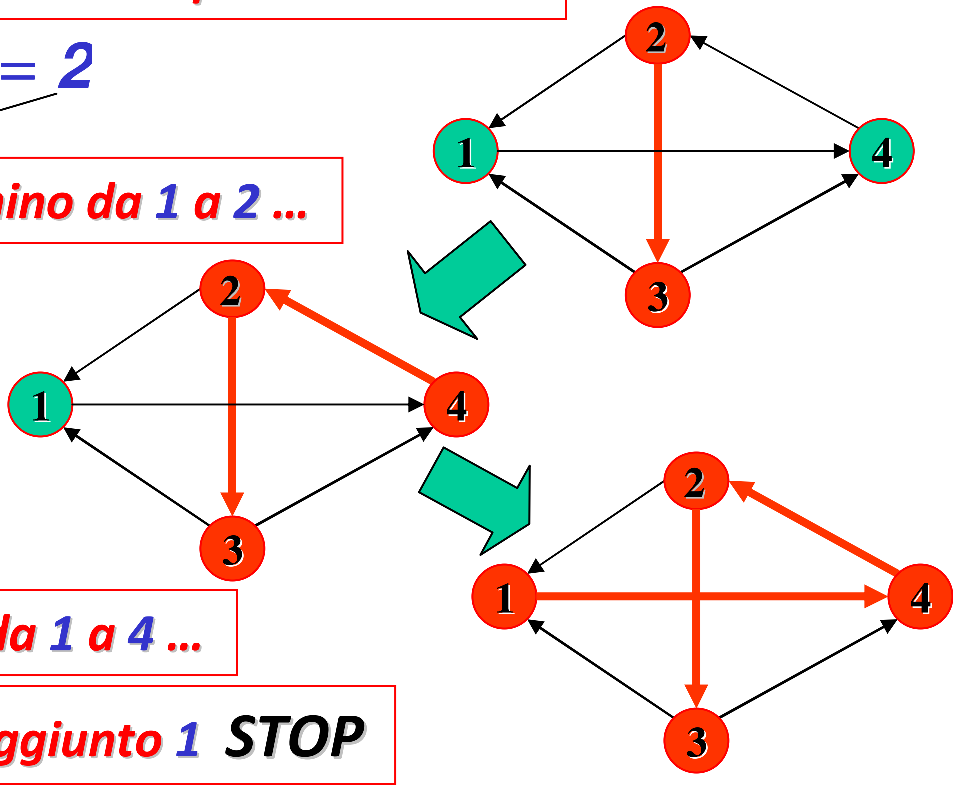
Poi si cerca il predecessore di 2 nel cammino da 1 a 2 …

$$pred\,(1,2) = 4$$

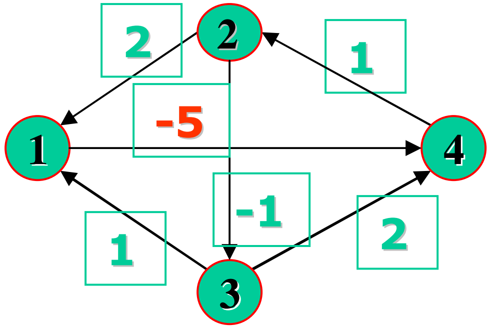
Infine il predecessore di 4 nel cammino da 1 a 4 …

$$pred\,(1,4) = 1$$

Raggiunto 1 **STOP**



Algoritmo di Floyd-Warshall: Ciclo negativo



$$D^4 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Non esiste una soluzione

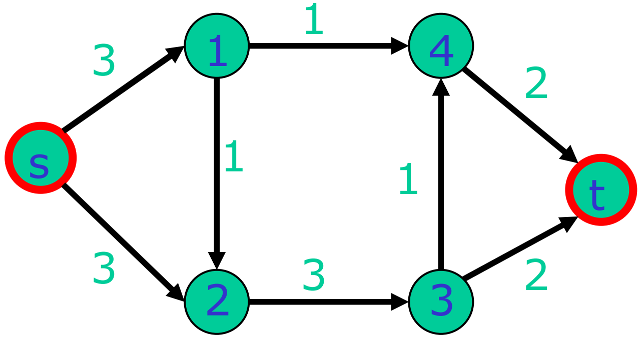
Flusso s-t in un Grafo Orientato

DATI: *Un grafo orientato G(N,A)*

*Un nodo **sorgente** s∈N*

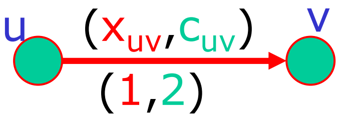
*Un nodo **pozzo** t∈N-{s}*

Un vettore capacità $c \geq 0_{|A|}$



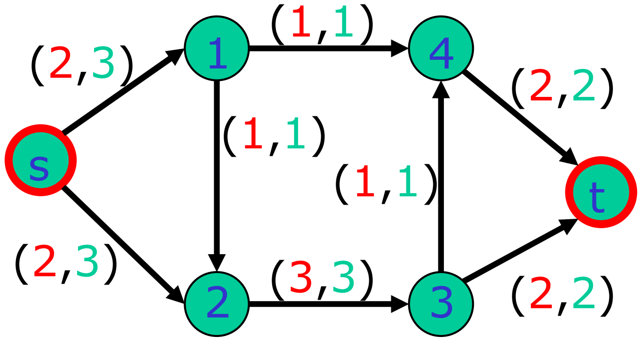
DIREMO: ***FLUSSO s-t** di (G,c)*

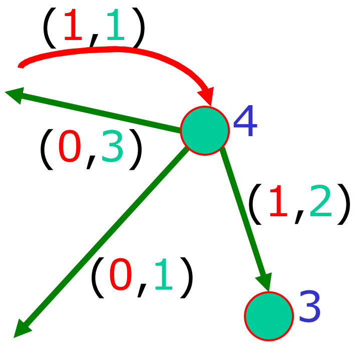
un vettore $\boldsymbol{x} \in \Re^{|A|}$ tale che:



$$0 \leq x_{uv} \leq c_{uv}$$

[vincolo di capacità]





$$\sum_{uv\in \delta^-_G(v)} x_{uv} - \sum_{vu\in \delta^+_G(v)} x_{vu} = 0 \qquad \boxed{v \notin \{s,t\}}$$

[conservazione del flusso]

$$\sum_{tu\in \delta^+_G(t)} x_{tu} = \sum_{us\in \delta^-_G(s)} x_{us} = 0$$

[nulla esce da t e nulla entra in s]

Flusso s-t in un Grafo Orientato

$\mathbf{x}(\delta_G^-(v)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(v)) = 0$ per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta_G^-(t)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(t)) = \mathbf{x}(\delta_G^-(t)) = \mathbf{f_t(x)}$ flusso entrante in t

$\mathbf{x}(\delta_G^-(s)) - \mathbf{x}(\delta_G^+(s)) = - \mathbf{x}(\delta_G^+(s)) = \mathbf{- f_s(x)}$ flusso uscente da s

Sommando tutte le equazioni otteniamo

⇒ $\mathbf{x}\Big(\bigcup_{v\in N} \delta_G^-(v)\Big) - \mathbf{x}\Big(\bigcup_{v\in N} \delta_G^+(v)\Big) = f_t(x) - f_s(x)$

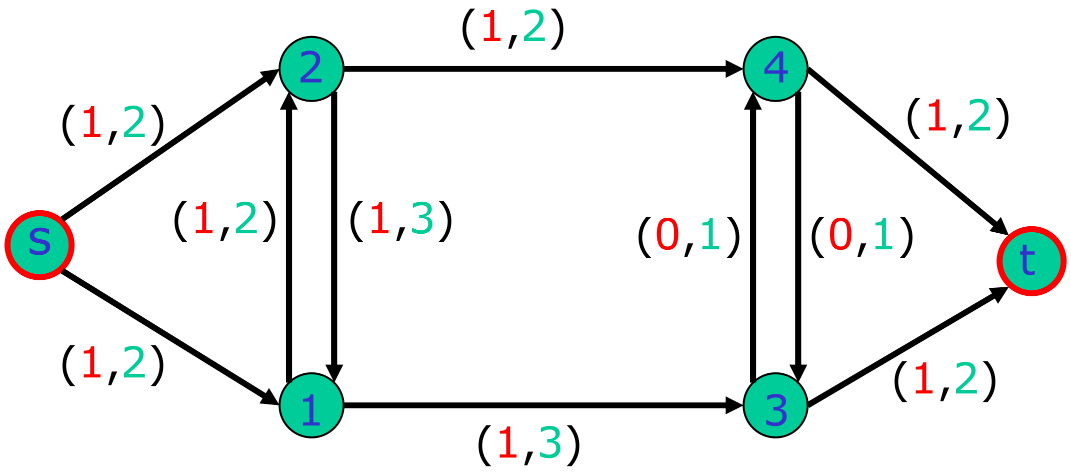
Poichè *ogni arco appartiene ad una (e una sola) stella entrante e ad una (e una sola) stella uscente,*

abbiamo che: $\bigcup_{v\in N} \delta_G^-(v) = \bigcup_{v\in N} \delta_G^+(v) = A$

⇒ $\mathbf{x}(A) - \mathbf{x}(A) = 0 = f_t(x) - f_s(x)$ ⇒ $\mathbf{f_t\,(x) = f_s(x) = f(x)}$

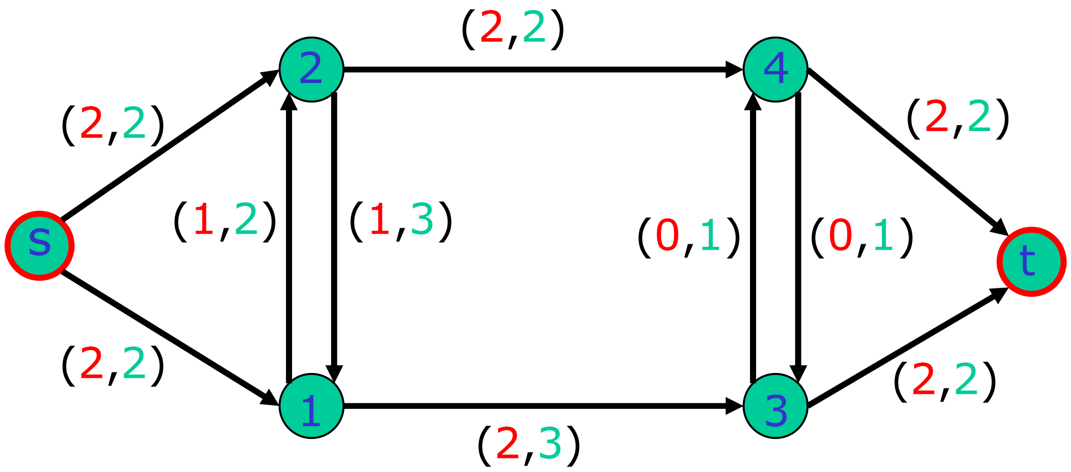
flusso entrante in t = **flusso uscente** da s =
= **valore f(x) del flusso** x

Flusso s-t in un Grafo Orientato: Esempi



flusso x^1

$f_s(x^1) = f_t(x^1) = f(x^1) = 2$



flusso x^2

$f_s(x^2) = f_t(x^2) = f(x^2) = 4$

Problema del Flusso Massimo

$\mathbf{x}(\delta^-_G(v)) - \mathbf{x}(\delta^+_G(v)) = 0$ per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(t)) - \mathbf{x}(\delta^+_G(t)) = \mathbf{x}(\delta^-_G(t)) = f(x)$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(s)) - \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = - \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = - f(x)$

Si vuole massimizzare il flusso $f(x)$ uscente da s (entrante in t)

(MF) max f

$\mathbf{x}(\delta^-_G(v)) - \mathbf{x}(\delta^+_G(v)) = 0$ per ogni nodo $v \notin \{s,t\}$

$\mathbf{x}(\delta^-_G(t)) = f$

$- \mathbf{x}(\delta^+_G(s)) = - f$

$0 \leq \mathbf{x}_{uv} \leq \mathbf{c}_{uv}$ per ogni arco $uv \in A$

(MF) **max f**

$\mathbf{Mx - bf = 0}$

$0 \leq \mathbf{x}_{uv} \leq \mathbf{c}_{uv} \quad \forall uv \in A$

M: Matrice di Incidenza di **G**

b: $b_s=-1;\ b_t=1;\ b_v=0\ \forall v \in N-\{s,t\}$

PROBLEMA DI FLUSSO DI MINIMO COSTO (MCF)

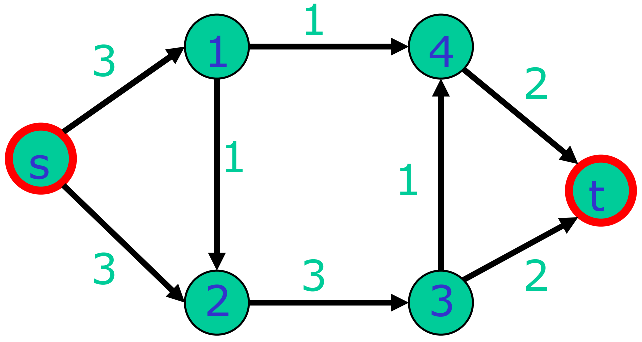
Problema del Massimo Flusso

(MF) $\max \quad f$

$$Mx - bf = 0_{|N|}$$

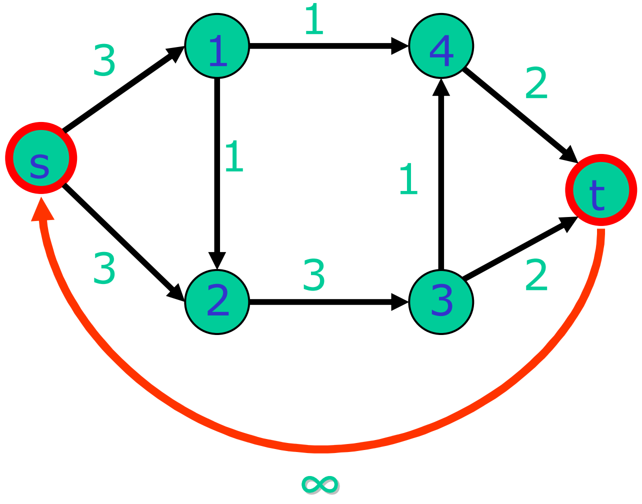
$$0_{|A|} \le x \le c$$

$$b = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array} \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} M & -b \end{bmatrix}$$

Matrice di incidenza del grafo ottenuto aggiungendo l'arco **ts**



(MF) $\max \quad x_{ts}$

$$-Mx + bx_{ts} = 0_{|N|}$$

$$0_{|A|} \le x \le c$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

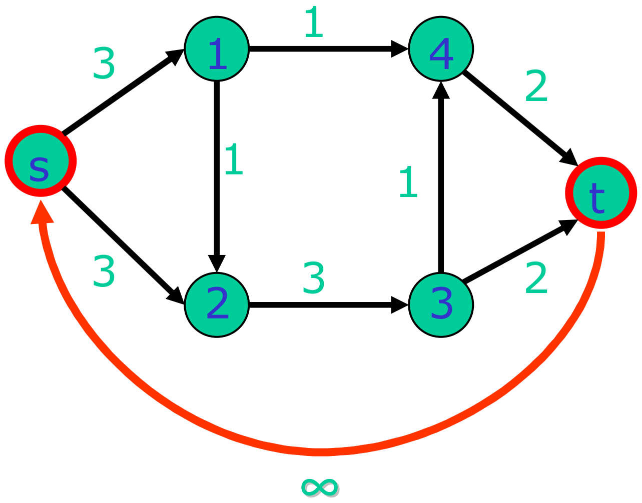
Duale del Massimo Flusso

(MF) $\max \quad x_{ts}$

$(z \in R^{|N|}) \quad - Mx + bx_{ts} = 0_{|N|}$

$(y \in R^{|A|}) \quad I_{|A|}x \leq c$

$x \geq 0_{|A|}; \;\; x_{ts} \geq 0$



DUALE del Massimo Flusso

(DMF) $\min \quad c^T y$

$(x \in R^{|A|}) \quad - M^T z + I_{|A|} y \geq 0_{|A|}$

$(x_{ts}) \quad z_t - z_s \leq 1$

$y \geq 0_{|A|}$

$\equiv$

(DMF) $\min \quad c^T y$

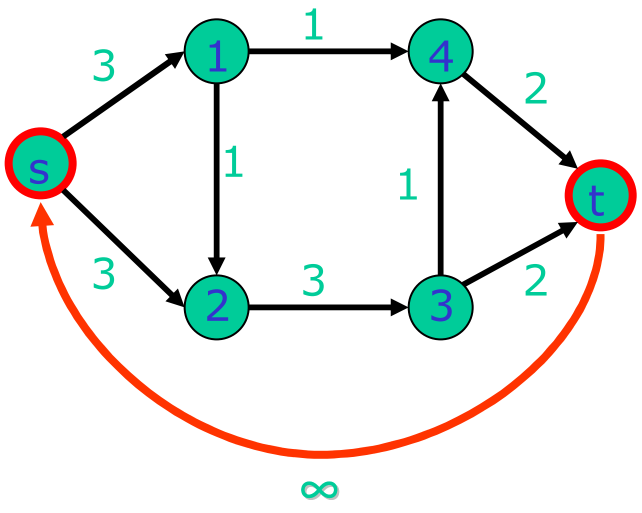
$z_u - z_v + y_{uv} \geq 0 \;\; \forall \, uv \in A$

$z_t - z_s \geq 1$

$y \geq 0_{|A|}$

Soluzioni Duali del Massimo Flusso

TEOREMA F5: *Il duale del massimo flusso*



(DMF) $\min \ c^T y$

$$z_u - z_v + y_{uv} \ge 0 \quad \forall\, uv \in A$$

$$z_t - z_s \ge 1$$

$$y \ge 0_{|A|}$$

Ammette una ***soluzione ottima*** $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{|N|+|A|}$

DIMOSTRAZIONE: *Una riga della matrice* $[M \ \ -b]$ *è* ***ridondante***

➡ Possiamo porre (nel duale) $z_s = 0$

La matrice dei vincoli di **(DMF)** *è* **TUM**, *I termini noti sono* ***interi***

$\Rightarrow$ **esiste** una soluzione ottima **intera** (z^o, y^o) di **(DMF)** $(z^o_s = 0)$

poniamo $X = \{u \in N : z^o_u \le 0\}$ $\quad \bar{X} = \{u \in N : z^o_u \ge 1\}$

e osserviamo che: $\boxed{z^o_t - z^o_s = z^o_t \ge 1 \Rightarrow t \in \bar{X}}$

Soluzioni duali del Massimo Flusso(II)

(z°, y°) soluzione *ottima* **intera** di **(DMF)** $\quad (z^o_s = 0)$

$$X = \left\{u \in N : z^o_u \le 0\right\} \qquad \bar{X} = \left\{u \in N : z^o_u \ge 1\right\}$$

$$u \in X, v \in \bar{X} \Rightarrow y^o_{uv} \ge z^o_v - z^o_u \ge 1$$

[vincolo duale]

$$c^T y^\circ = \sum_{uv \in A} c_{uv} y^o_{uv} \ge \sum_{uv \in A: u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv} y^o_{uv} \ge \boxed{\sum_{uv \in A: u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv} = LB}$$

$[c \ge 0_{|A|}; y \ge 0_{|A|}]$

LOWER BOUND per il **DUALE**

MA IL VETTORE:

$$\begin{cases} z^*_u = 0 & u \in X \\ z^*_u = 1 & u \in \bar{X} \\ y^*_{uv} = 1 & u \in X, v \in \bar{X} \\ y^*_{uv} = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ammissibile per il duale

$$z^*_u - z^*_v + y^*_{uv} \ge 0 \quad \forall\, uv \in A$$

$$z^*_t - z^*_s \ge 1 \qquad [z^o_s = 0 \text{ e } t \in \bar{X}]$$

$$y^* \ge 0_{|A|}$$

inoltre $\quad c^T y^* = \sum_{uv \in A: u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv} = LB$

"gap"=0 ⇒ (z*,y*) è OTTIMA ■

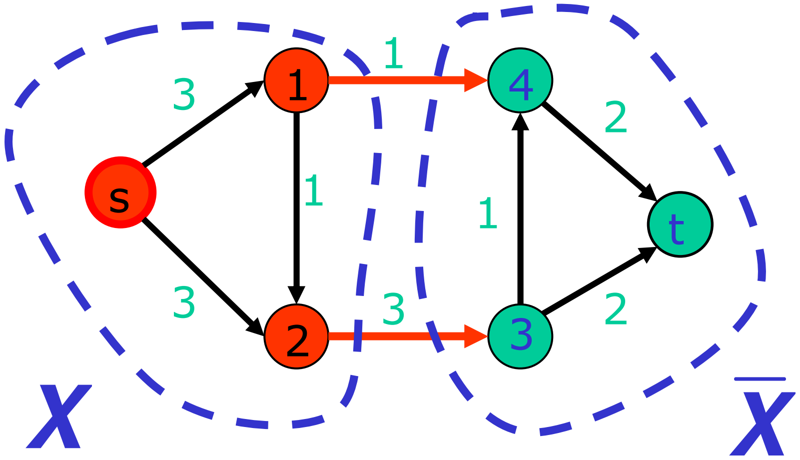
Capacità dei tagli s-t

Cosa rappresenta la soluzione duale ? :

$$\begin{cases} z^o_u = 0 & u \in X \\ z^o_u = 1 & u \in \overline{X} \\ y^o_{uv} = 1 & u \in X, v \in \overline{X} \\ y^o_{uv} = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} z^o_s = z^o_1 = z^o_2 = 0 \\ z^o_3 = z^o_4 = z^o_t = 1 \\ y^o_{14} = y^o_{23} = 1 \\ y^o_{uv} = 0 \qquad \text{altrimenti} \end{cases}$$



TAGLIO s-t di (*G*,*c*)
- Taglio che ***"separa" s*** da ***t***
- ***z*** vettore di incidenza di $\overline{X}$
- ***y*** vettore di incidenza di $\delta^+(X)$

.. e cosa rappresenta la funzione obiettivo duale ? : $c^T y^o = \sum_{uv \in A: u \in X, v \in \overline{X}} c_{uv}$

La somma delle capacità degli archi di $\delta^+(X)$

CAPACITA' del TAGLIO s-t $\delta^+(X)$ di **(G,c)**

Massimo Flusso e Minimo Taglio

ABBIAMO DIMOSTRATO DUE COSE:

1. **Per ogni TAGLIO s-t** $\delta^+(X)$ la soluzione:

$$\begin{cases} z_u^o = 0 & u \in X \\ z_u^o = 1 & u \in \bar{X} \\ y_{uv}^o = 1 & u \in X, v \in \bar{X} \\ y_{uv}^o = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è **ammissibile per il duale ed ha valore** $c^T y^o = \sum_{uv \in A : u \in X, v \in \bar{X}} c_{uv}$

pari alla **somma delle capacità degli archi del taglio**

FLUSSO MASSIMO f* $\leq$ Capacità di ogni taglio s-t

[dualità debole]

2. La **soluzione ottima** del **problema duale ha valore pari alla capacità di un particolare taglio** s-t $\delta^+(X^*)$

$$c^T y^* = \sum_{uv \in A : u \in X^*, v \in \bar{X}^*} c_{uv}$$

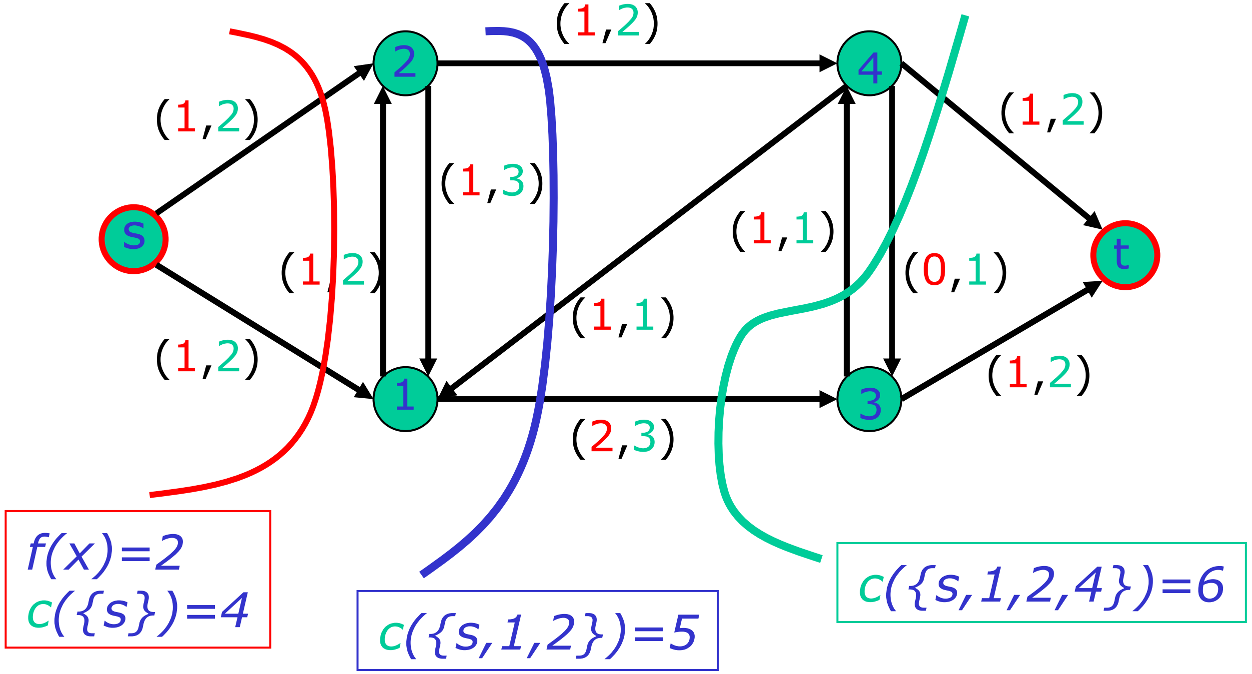
FLUSSO MASSIMO f* = capacità minima di un taglio s-t

[dualità forte]

Max-Flow-Min-Cut Theorem

Esempi

Flusso x

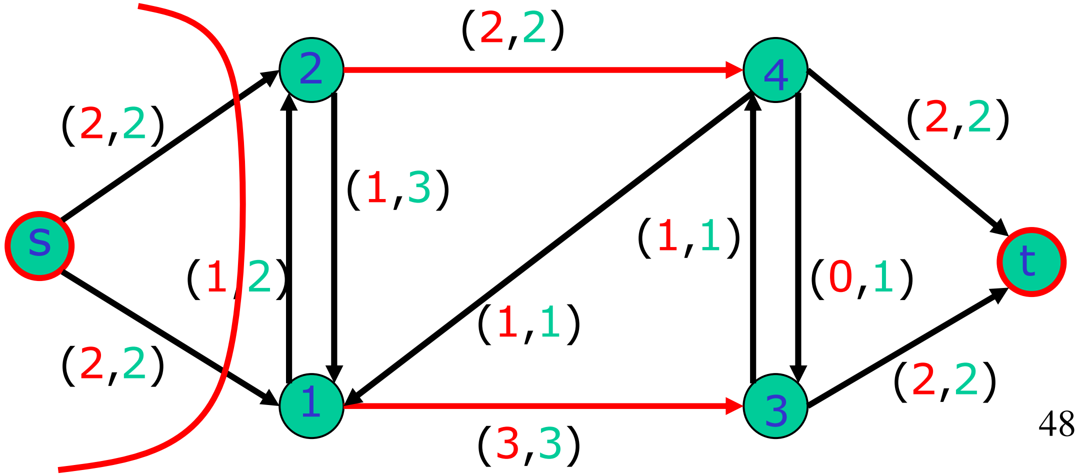


f(x)=2
c({s})=4

c({s,1,2})=5

c({s,1,2,4})=6

Flusso x′



f(x′)=4
c({s})=4

f(x′) è massimo !