Ottimizzazione Combinatoria
Formulazioni e Formulazioni Ottime

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma “La Sapienza”

A.A. 2010

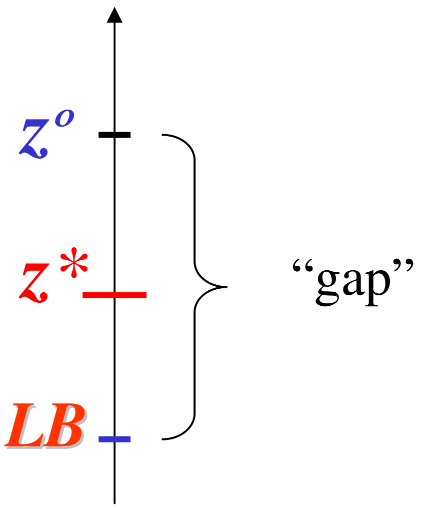
Soluzioni e "Certificati"

$x^o \in S$ *soluzione ammissibile*

$f(x^o) = z^o$ *valore della soluzione ammissibile*

$f(x^*) = z^*$ *valore della soluzione ottima*

Lower bound $LB \le z^* =$ "*certificato di qualità*" per x^o :



Riduzione del "gap" :

1. Miglioramento del "lower bound"
2. Miglioramento (riduzione) di $\bar{z}$

Tecniche di ricerca nell'insieme delle soluzioni

Tecniche euristiche (ευρισκειν = *trovare*)

- Algoritmo Avido ("Greedy")
- Ricerca Locale ("Local Search")
- Algoritmi Genetici

“Lower Bounds”

Metodi per il calcolo dei “Lower Bounds”:

- Rilassamento Lineare
- *Rilassamento Lagrangiano*
- *Programmazione Semi-Definita*
- *Metodi combinatorici e “ad hoc”*

- Formulazione Lineare
- Teoria della Dualità

Formulazione Lineare

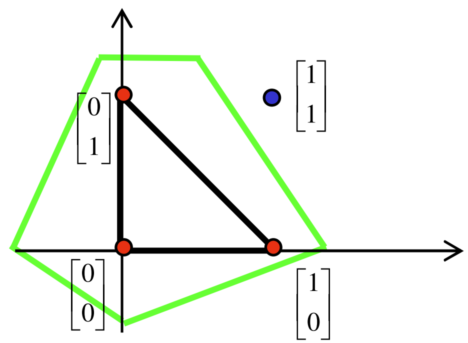
Problema di PL01: $\boxed{\min \{c^T x : \; x \in S\}}$

$P = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$ POLIEDRO con $(A \in R^{mn}, \; b \in R^m)$

P è una FORMULAZIONE di $S \iff P \cap \{0,1\}^n = S$

Un poliedro P è una *formulazione* se e solo se

- *contiene tutti i vettori di S*
- *non contiene alcun vettore di* $\{0,1\}^n - S$



Posso avere ***infinite*** formulazioni dello stesso problema di PL01

Rilassamento Lineare

Problema di PL01: $\boxed{\min \{c^T x:\ x \in S\}}$

$$P \text{ è una FORMULAZIONE di } S \iff P \cap \{0,1\}^n = S$$

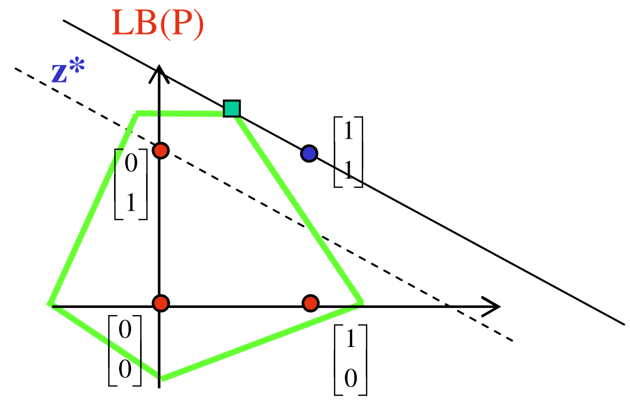
$$\min \{c^T x: x \in S\} = \min \{c^T x: x \in P \cap \{0,1\}^n\} = c^T x^* = z^*$$
$$\geq \min \{c^T x: x \in P\} = \mathrm{LB}(P)$$

Problema di PL
(***Rilassamento Lineare***)

Valore della Soluzione
Ottima del Problema di PL01

$\boxed{\mathrm{LB(P)} \leq z^*}$

LB(P) "*Lower Bound*" per z^*

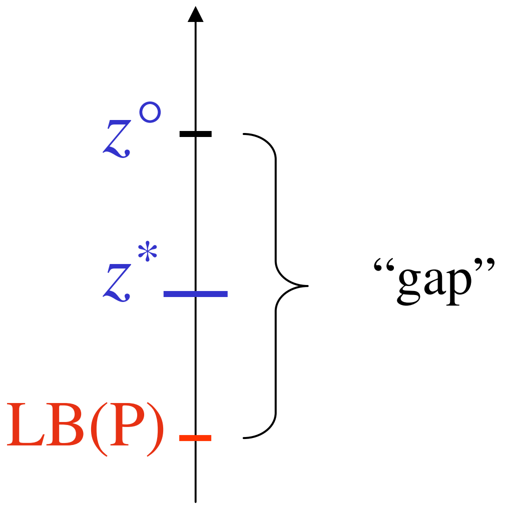


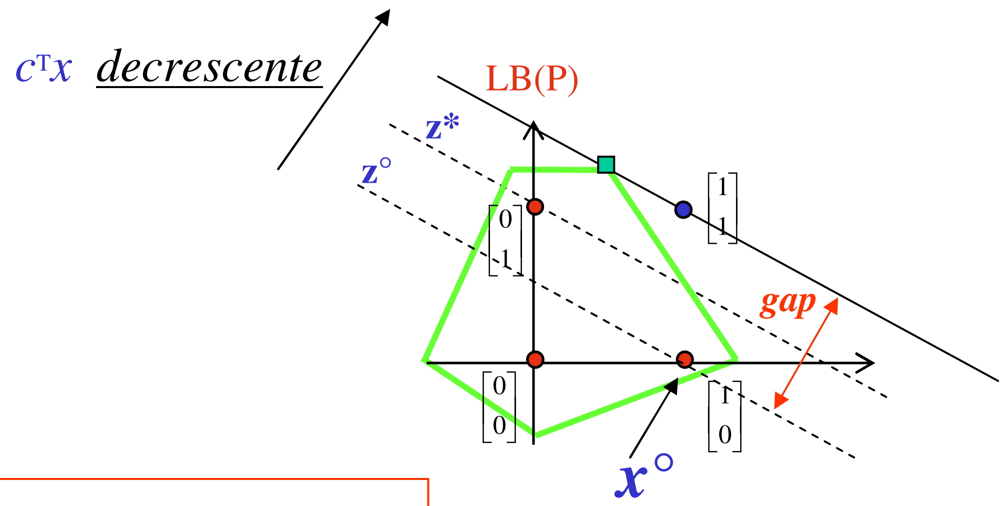
“Lower Bound” per un problema PL01

Problema di PL01: $\boxed{\min \{c^T x : x \in S\}}$

$$LB(P) \leq \min \{c^T x : x \in S\} = z^*$$

- Calcolare z^* è (di solito) *difficile*
- Calcolare LB(P) è *facile* (*Simplesso*)
- Se conosciamo una soluzione ammissibile $x^\circ \in S$ (di valore $z^\circ = c^T x^\circ$) LB(P) fornisce una <u>*certificazione di qualità*</u> per x°.





$\boxed{\text{“gap” nullo} \rightarrow x^\circ \text{ ottimo per PL01}}$

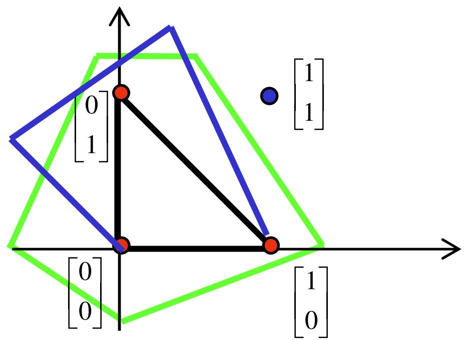
Lower Bounds ... riassumendo

Problema di PL01: $\boxed{\min \{c^T x : x \in S\}}$

$$LB(P) \leq \min \{c^T x : x \in S\} = z^*$$

- Calcolare z^* è ***difficile***
- Calcolare LB(P) è ***facile*** *(Problema di Programmazione Lineare)*
- Trovare una soluzione $x^\circ \in S$ è (di solito) ***facile*** *(Euristiche)*
- Il "gap" $c^T x^\circ$ - LB(P) certifica la qualità di x°
    - *piccolo "gap"* = buona qualità di x°
    - *"gap" nullo* = x° *ottimo per PL01*

Il "gap" dipende dalla formulazione P



- S ammette molte formulazioni alternative
- *Come classificarle (e sceglierle) ?*

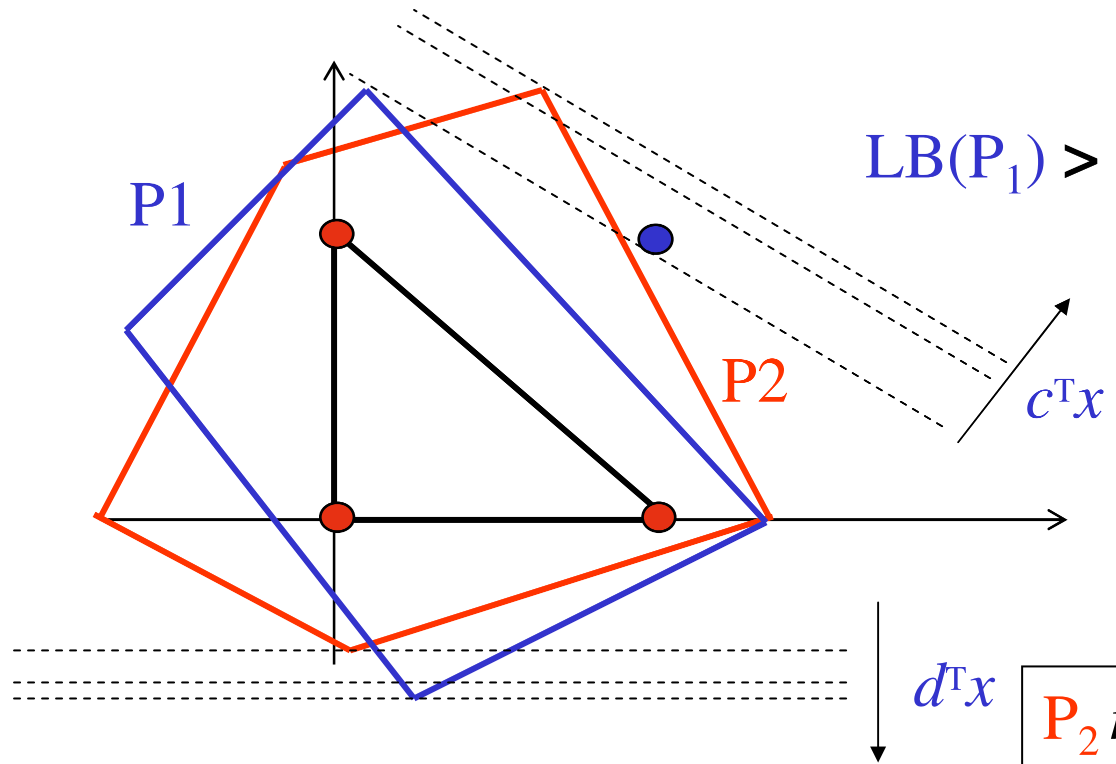
Criteri di qualità delle Formulazioni (1)

No. disequazioni di $Ax \leq b$? ; No. variabili ? ; facilità di calcolo ?

Qualità = "piccolo gap" = massimo "lower bound

CRITERIO 1: P_1 migliore di P_2 $\Leftrightarrow$ $LB(P_1) > LB(P_2)$

Problema: Dipendenza dalla funzione obiettivo



$LB(P_1) > LB(P_2)$

P_1 *migliore di* P_2
Se utilizzo $c^T x$

P_2 *migliore di* P_1
Se utilizzo $d^T x$

$LB(P_2) > LB(P_1)$

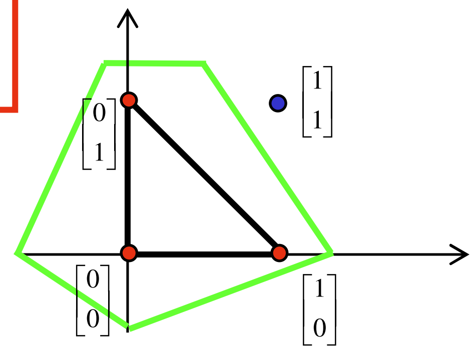
Criteri di qualità delle Formulazioni (2)

Il criterio di qualità deve essere indipendente dalla funzione obiettivo (che non è prevedibile a priori)

CRITERIO 2: P_1 migliore di P_2 $\Longleftrightarrow$ $LB(P_1) > LB(P_2)$ per ogni $c \in \boldsymbol{R}^n$

Equivalente a:

CRITERIO 3: P_1 migliore di P_2 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P_1 \subseteq P_2}$



Esiste una formulazione contenuta in ogni altra ?

$P_S = conv(S) \subseteq P$ $\quad\forall$ formulazione P di S

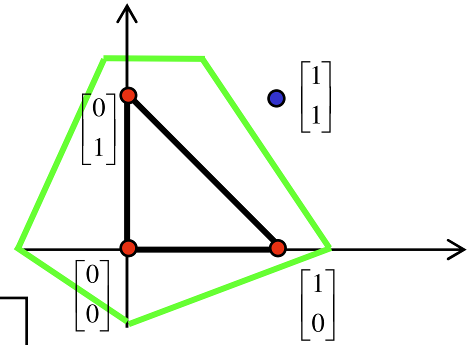
Formulazione ottima

Formulazione Ottima

Problema di PL01: $z^* = \min \{c^T x : x \in S\}$

$P_S = Conv(S) = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$ POLIEDRO ($A \in R^{mn}$, $b \in R^m$)

- S *insieme dei vertici di* P_S ($S = Ext(P_S)$)
- *Ogni disequazione di* $Ax \leq b$ *definisce una faccia massimale di* P_S (... se $dim(P_S) = n$)



$z^* = \min \{c^T x : x \in S\} = \min \{c^T x : x \in Ext(P_S)\}$
$= \min \{c^T x : x \in P_S\} = \mathrm{LB}(P_S) = c^T x°$

x°* soluzione ottima del *rilassamento lineare

$z^* = \mathrm{LB}(P_S) = c^T x°$ ***(gap=0)*** ⇒ $c^T x° = z^* \leq c^T x \quad \forall x \in S$

$x° \in Ext(P_S) = S$ ⇒ *x°* ***soluzione ottima del*** PL01

Rilassamenti di P_S (I)

Disponiamo di una descrizione (esplicita) di:

$P_S = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leq b\}$ per ogni problema di PL01 ?

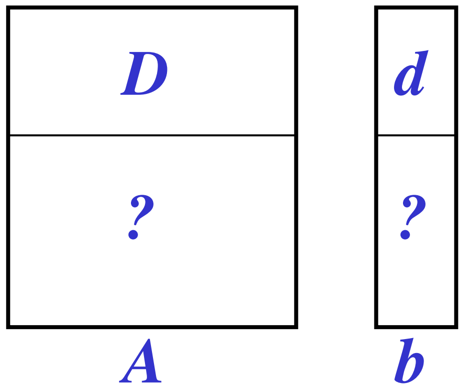
Ovvero: ***Conosciamo la matrice A e il vettore b ?***

Dove "conoscere" significa: *conoscere i coefficienti* oppure *avere una regola che consente di calcolare i coefficienti* di ogni riga della matrice (***A***,***b***)

Sfortunatamente NO !

Quasi sempre conosciamo solo *alcune (poche)* righe di (***A***,***b***) che *definiscono una formulazione* di S

- $P = \{x \in \mathbf{R}^n : Dx \leq d\}$
- $P \cap \{0,1\}^n = S$



Esempio di P_S

$S=\{\, y\in\{0,1\}^5:\ 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 2y_5 \le 11 \,\}$

$P_S = \{\, y\in R^5 : Ay \le b,\ y \ge 0_5 \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 + y_2 \le 1 \\ y_1 + y_3 \le 1 \\ y_1 + y_4 + y_5 \le 2 \end{array}}$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 \le 2$$
$$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 \le 4$$
$$1 \ge y_1, \ldots, y_5 \ge 0$$

Regola di costruzione di un "tipo" di riga di ***A***:
Se la somma dei coefficienti di ***k*** *variabili è maggiore di* ***11*** *allora al più* ***k-1*** *di esse possono essere poste ad* ***1***.

$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 \le 1 \\ y_1 + y_3 \le 1 \\ y_1 + y_4 + y_5 \le 2 \end{array} \Rightarrow$$

Famiglia di disequazioni di P_S

Rilassamenti di P_S (II)

Non disponiamo di una descrizione di P_S per ogni problema di PL01.

Disponiamo di Rilassamenti di P_S, *ovvero:*

- Poliedri $P = \{x \in R^n : Dx \leq d\}$) con le seguenti proprietà:

1. Il poliedro P è una formulazione di S
2. Il sistema $Dx \leq d$ è costituito da alcune famiglie di disequazioni appartenenti al sistema $Ax \leq b$.

- Ciascun rilassamento produce un "lower bound" di z^* :

$$\text{LB(P)} = min\ \{c^T x : x \in P\} \leq z^*$$

Esempio: (mini) pianificazione di investimenti

- Due progetti A e B
- Vantaggi c_A e c_B associati
- Risorse necessarie $d_A = 5$ e $d_B = 7$
- Vincolo: risorse utilizzate $\leq$ D =10

$$\min c_A x_A + c_B x_B$$

$$x \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Formulazione Naturale:</u>

$$\min c_A x_A + c_B x_B$$

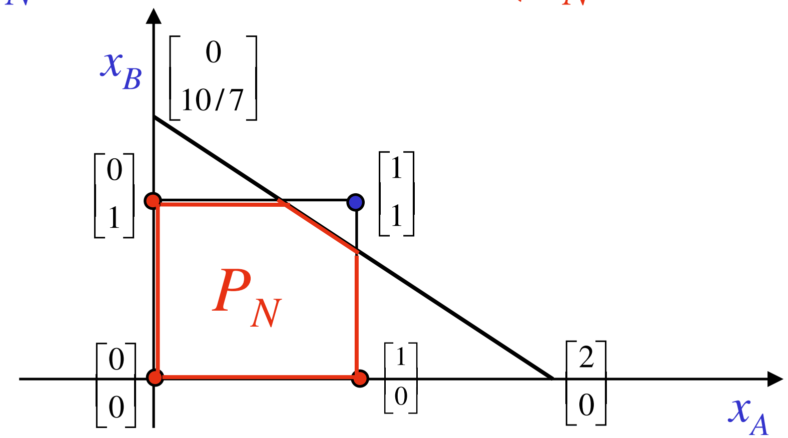
$$x \in P_N = \begin{cases} \boxed{5x_A + 7x_B \leq 10} \\ \boxed{1 \geq x_A, x_B \geq 0} \end{cases}$$

vincoli di "box"

Verifica: $P_N \cap \{0,1\}^2 = S$

a) $x \in S \Rightarrow x \in P_N$ $\quad (S \subseteq P_N \cap \{0,1\}^2)$

b) $x \in P_N \cap \{0,1\}^2 \Rightarrow x \in S$ $\quad (P_N \cap \{0,1\}^2 \subseteq S)$



Esempio: (mini) pianificazione di investimenti

Formulazione Naturale:

$$\min\ -5/3\, x_A - 11\, x_B$$

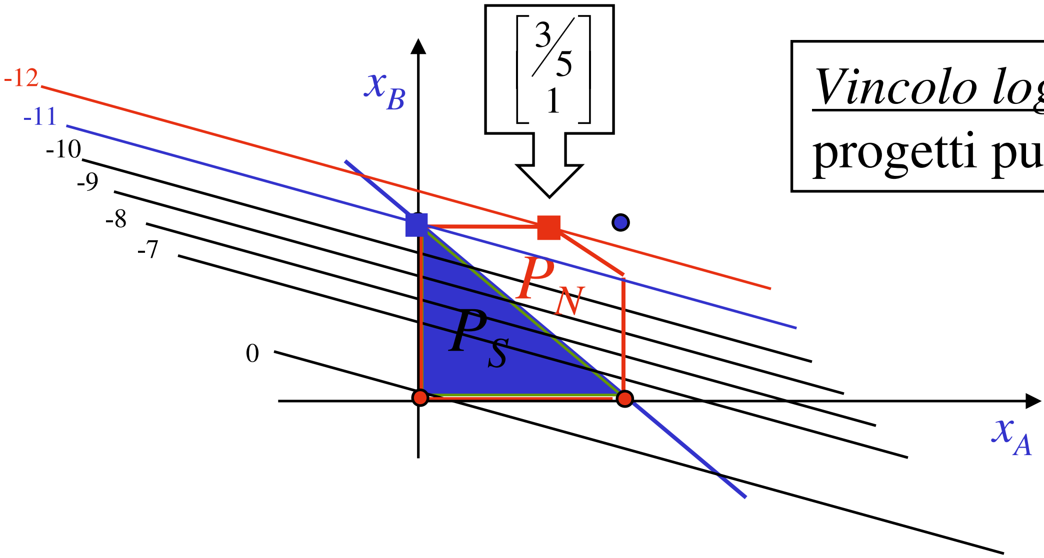
$$x \in P_N = \begin{cases} 5x_A + 7x_B \leq 10 \\ 1 \geq x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Formulazione Ottima:

$$\min\ -5/3x_A - 11\, x_B$$

$$x \in P_S = \begin{cases} \boxed{x_A + x_B \leq 1} \\ 1 \geq x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Vincolo logico: uno solo dei due progetti può essere attivato



Pianificazione degli Investimenti - *Formulazione Naturale*

S = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in <u>ogni periodo</u>*}

$$A^T = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11},} & a_{12}, \dots, & a_{1t} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots, & a_{2t} \\ & \dots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, \dots, & a_{mt} \end{pmatrix}$$

$$\le$$

$$b^T = [\, b_1, \; b_2, \dots, \; b_t \,]$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, \dots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, \dots, & a_{m2} \\ & \dots & \\ a_{1t}, & a_{2t}, \dots, & a_{mt} \end{pmatrix} \quad \le \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_t \end{pmatrix}$$

$\boxed{x \in \mathbf{S}}$ ⇒ $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 +, \dots, a_{m1}x_m \le b_1$

$\boxed{x \in \mathbf{S}}$ ⇔ $\boxed{x \in \{0,1\}^{\mathrm{I}},\ Ax \le b}$

Pianificazione degli Investimenti - *Formulazione Naturale*

$$\max c^T x$$
$$x \in \boldsymbol{S}$$
vincoli aggiuntivi

$$\equiv$$

$$\max c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \{0,1\}^{I}$$
vincoli aggiuntivi

$P_0 = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Ax \geq b,\ 1_n \geq x \geq 0_n\}$ *Formulazione Naturale*

• Nessuno conosce la formulazione ottima

Esistono formulazioni migliori?

Esistono buoni rilassamenti della formulazione ottima?