

Ottimizzazione Combinatoria

Proprietà dei Grafi

ANTONIO SASSANO

*Università di Roma "La Sapienza"
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Corso di Laurea in "Ingegneria Gestionale"*

Roma, 6 Maggio 2003

Grafi

- **TEORIA DEI GRAFI:**

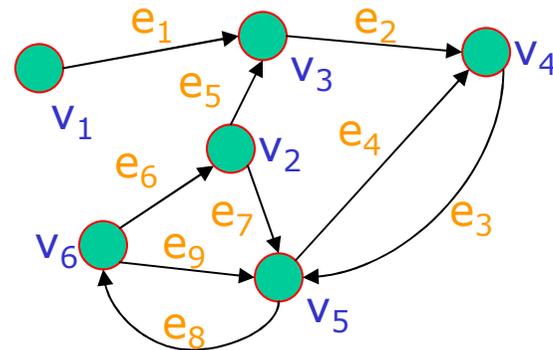
Studia le proprietà metriche e topologiche delle relazioni binarie

- Oggetti \longrightarrow *Nodi*
- Relazioni tra coppie \longrightarrow *Archi*

Grafo $G(N,A)$ con:

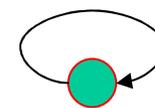
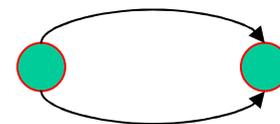
$N = \{v_1, \dots, v_n\}$ *Insieme dei Nodi di G*

$A = \{e_1, \dots, e_m\}$ *Insieme degli Archi di G*



IPOTESI: Grafo semplice

Non esistono archi paralleli o "loop"



archi paralleli

"loop"

Quindi: al più un arco per ogni coppia (ordinata) di nodi:

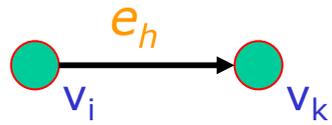
Coppia ordinata:

Arco orientato $(v_i, v_k) \equiv v_i v_k \equiv e_h$

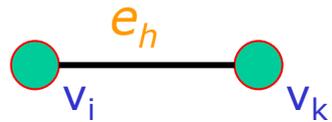
Coppia non-ordinata:

Arco non-orientato $v_i v_k \equiv v_k v_i \equiv e_h$

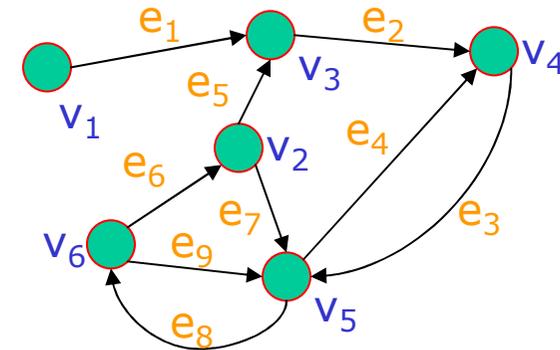
Grafi: Archi orientati e non-orientati



Arco orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$



Arco non-orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$



Per ogni arco orientato $(v_i, v_k) \equiv e_h$ diremo:

v_i coda di e_h v_i precede v_k e_h esce da v_i

v_k testa di e_h v_k segue v_i e_h entra in v_k

Per ogni arco orientato o non orientato diremo:

v_i adiacente a v_k

e_h incidente su v_k e v_i

v_i e v_k estremi di e_h

ESEMPIO

$v_1 v_3 \equiv e_1$

v_1 coda di e_1

v_3 testa di e_1

v_1 precede v_3

v_5 segue v_2

e_2 esce da v_3

e_3 entra in v_5

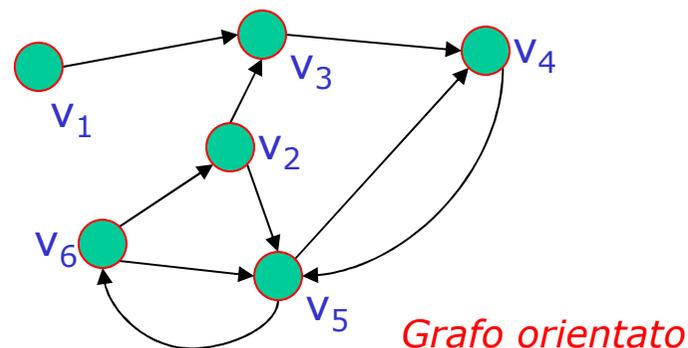
v_5 adiacente a v_2

e_3 incidente su v_4

Grafi orientati e non-orientati

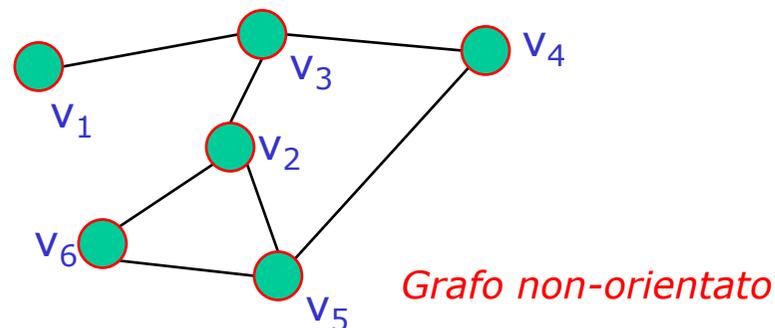
$G(N,A)$ Grafo orientato

Ogni arco di A è orientato



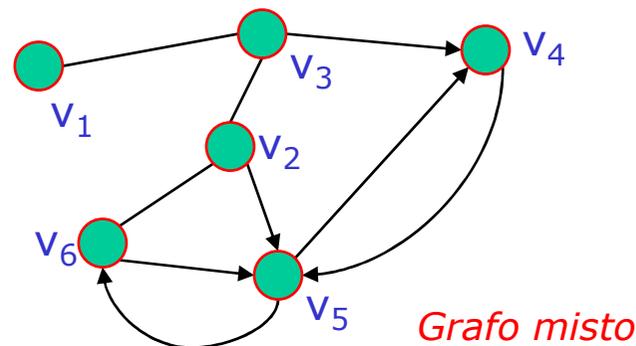
$G(N,A)$ Grafo non-orientato

Ogni arco di A è non-orientato



$G(N,A)$ Grafo misto

Ogni arco di A può essere orientato o non-orientato



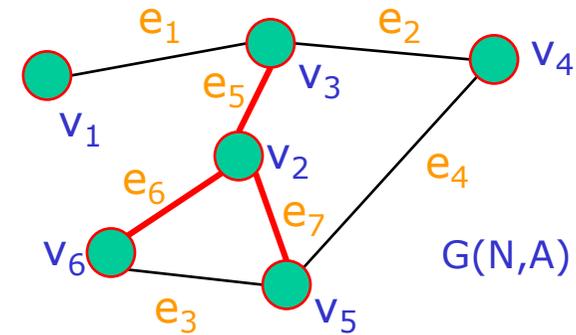
Stelle e Intorni

STELLA DI v IN G

$$\delta_G(v) = \{e : e = uv\} \subseteq A$$

Insieme degli *archi di G incidenti su v*

$$|\delta_G(v)| = d_G(v); \text{ GRADO di } v$$



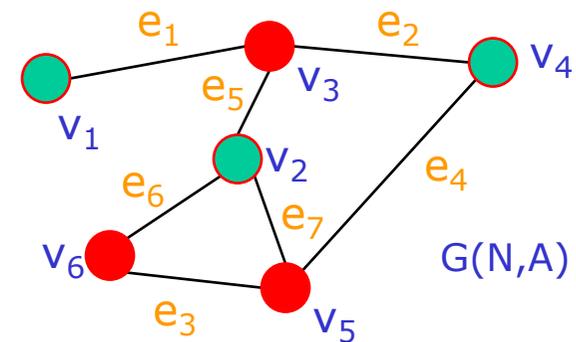
$$\delta_G(v_2) = \{e_5, e_6, e_7\}$$

$$d_G(v_2) = 3$$

INTORNO DI v IN G

$$N_G(v) = \{u : vu \in A\} \subseteq N$$

Insieme dei *nodi adiacenti a v in G*



$$N_G(v_2) = \{v_3, v_5, v_6\}$$

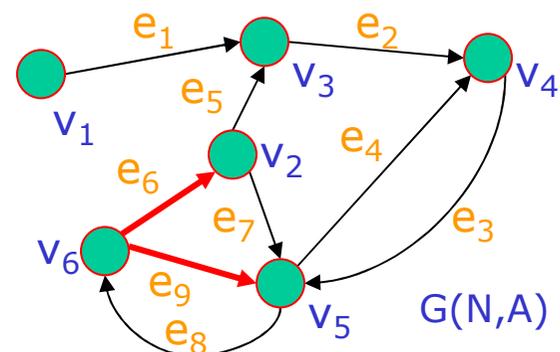
Stelle in Grafi Orientati

STELLA USCENTE DA v IN G

$$\delta_G^+(v) = \{e : v \text{ coda di } e\} \subseteq A$$

Insieme degli *archi di G uscenti da v*

$$|\delta_G^+(v)| = d_G^+(v); \text{ GRADO USCENTE}$$



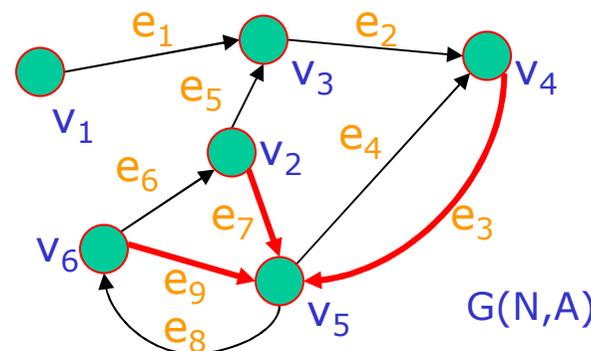
$$\delta_G^+(v_6) = \{e_6, e_9\}$$
$$d_G^+(v_6) = 2$$

STELLA ENTRANTE IN v IN G

$$\delta_G^-(v) = \{e : v \text{ testa di } e\} \subseteq A$$

Insieme degli *archi di G entranti in v*

$$|\delta_G^-(v)| = d_G^-(v); \text{ GRADO ENTRANTE}$$



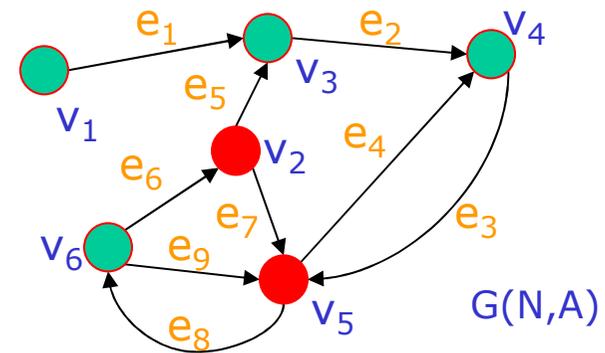
$$\delta_G^-(v_5) = \{e_3, e_7, e_9\}$$
$$d_G^-(v_5) = 3$$

Intorni in Grafi Orientati

INTORNO+ DI v IN G

$$N_G^+(v) = \{u : vu \in A\} \subseteq N$$

Teste di archi di G con coda in v

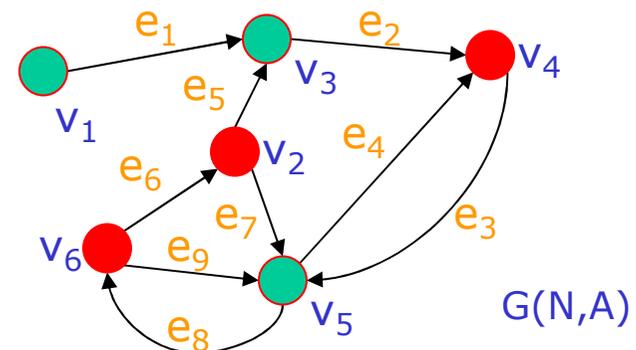


$$N_G^+(v_6) = \{v_2, v_5\}$$

INTORNO- DI v IN G

$$N_G^-(v) = \{u : uv \in A\} \subseteq N$$

Code di archi di G con testa in v



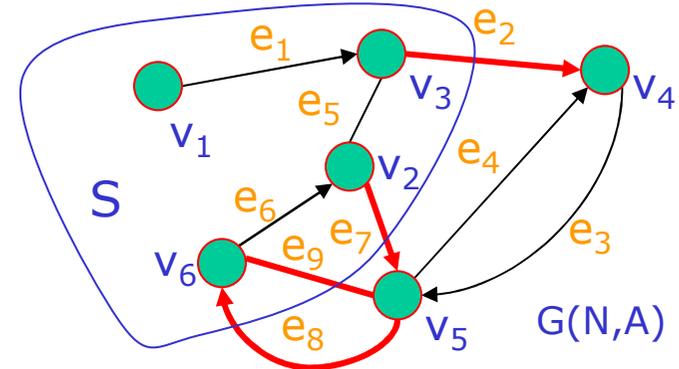
$$N_G^-(v_5) = \{v_2, v_4, v_6\}$$

Tagli

TAGLIO IN $G(N,A)$ **DEFINITO DA** $S \subseteq N$

$$\delta_G(S) = \{uv : u \in S \text{ e } v \in N-S\} \subseteq A$$

Insieme degli **archi di G** con un estremo in S e l'altro in $N-S$



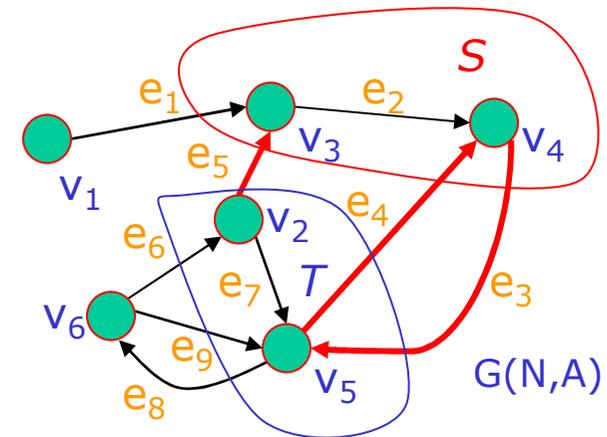
$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$$

$$\delta_G(S) = \{e_2, e_7, e_8, e_9\}$$

DATI $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$: definiamo

$$\delta_G(S, T) = \delta_G(S) \cap \delta_G(T)$$

Insieme degli **archi di G** con un estremo in S e l'altro in T



$$S = \{v_3, v_4\} \quad T = \{v_2, v_5\}$$

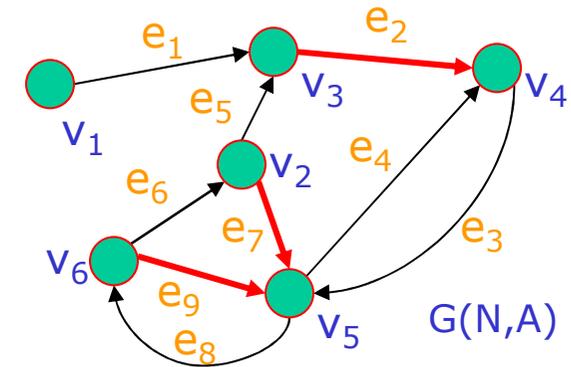
$$\delta_G(S, T) = \{e_3, e_4, e_5\}$$

Tagli in Grafi Orientati

TAGLIO USCENTE DA $S \subseteq N$ IN G

$$\delta_G^+(S) = \{uv : u \in S \text{ e } v \in N-S\} \subseteq A$$

Insieme degli *archi di G con coda in S e testa in $N-S$*



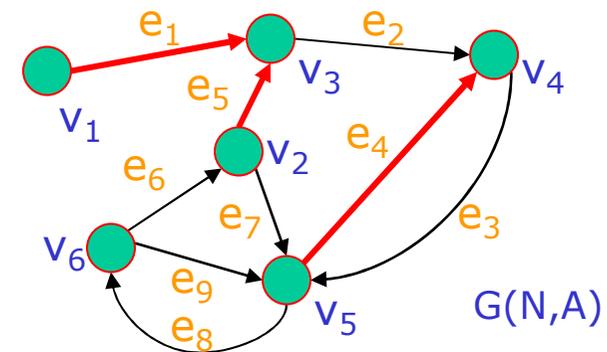
$$S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$$

$$\delta_G^+(S) = \{e_2, e_7, e_9\}$$

TAGLIO ENTRANTE IN $S \subseteq N$ IN G

$$\delta_G^-(S) = \{uv : u \in N-S \text{ e } v \in S\} \subseteq A$$

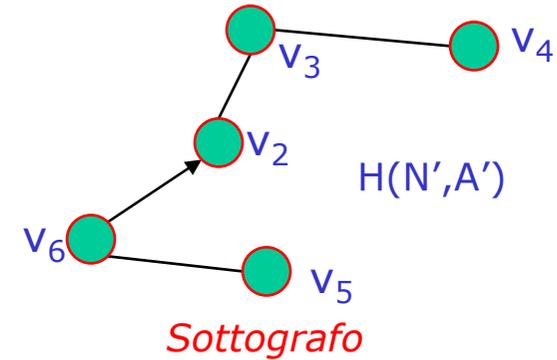
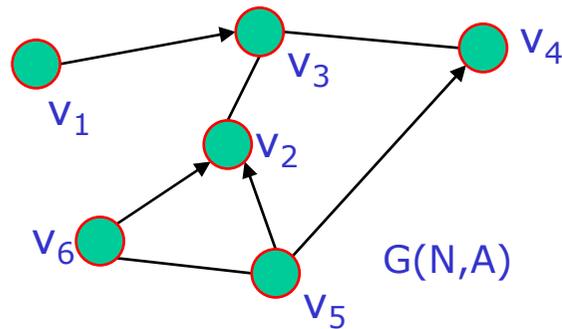
Insieme degli *archi di G con coda in $N-S$ e testa in S*



$$S = \{v_3, v_4\}$$

$$\delta_G^-(S) = \{e_1, e_5, e_4\}$$

Sottografi

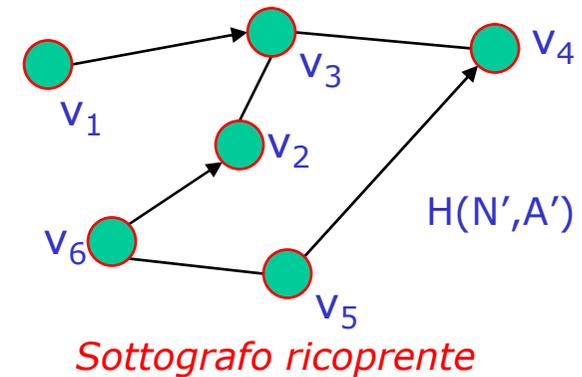


$H(N',A')$ SOTTOGRAFO DI $G(N,A)$

$$\Leftrightarrow N' \subseteq N \wedge A' \subseteq \{uv \in A : \{u,v\} \in N'\}$$

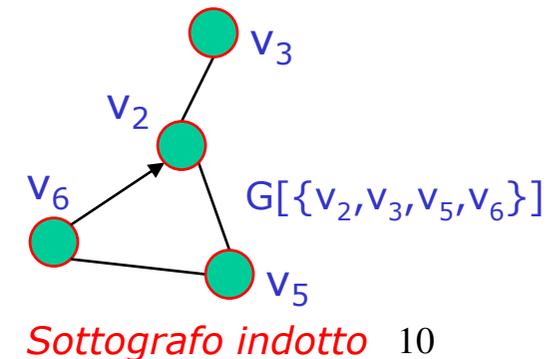
$H(N',A')$ SOTTOGRAFO RICOPRENTE DI $G(N,A)$

$$\Leftrightarrow N' = N \wedge A' \subseteq \{uv \in A : \{u,v\} \in N'\}$$



$H(N',A')$ SOTTOGRAFO INDOTTO DI $G(N,A)$

$$\Leftrightarrow N' \subseteq N \wedge A' = \{uv \in A : \{u,v\} \in N'\}$$



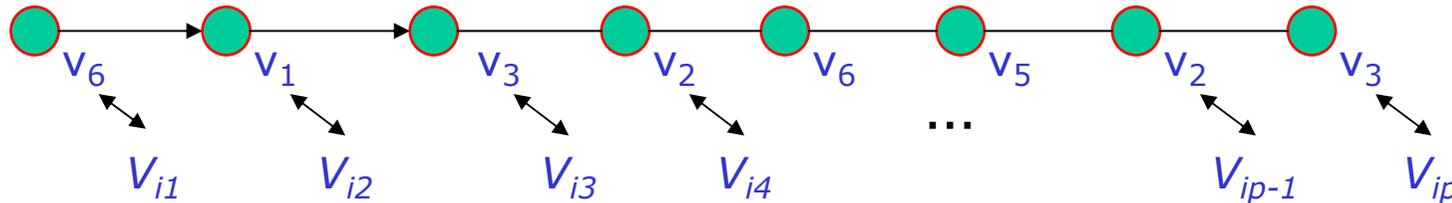
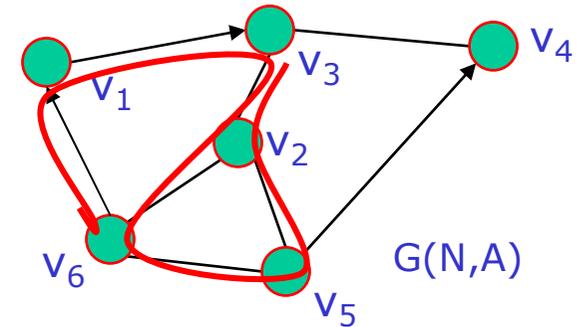
N' DETERMINA $H \Rightarrow H = G[N']$

Strutture Speciali: "Walk"

W "WALK" IN $G(N,A)$

SEQUENZA ALTERNANTE DI NODI e ARCHI

$W = (V_{i1}, (V_{i1}, V_{i2}), V_{i2}, (V_{i2}, V_{i3}), \dots, (V_{ip-1}, V_{ip}), V_{ip})$



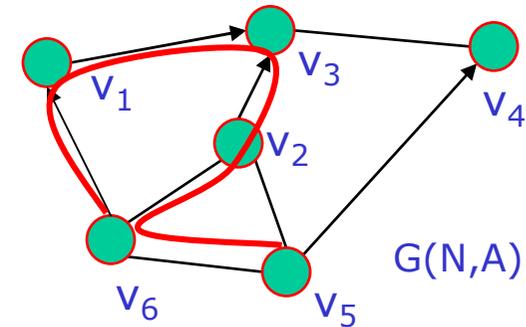
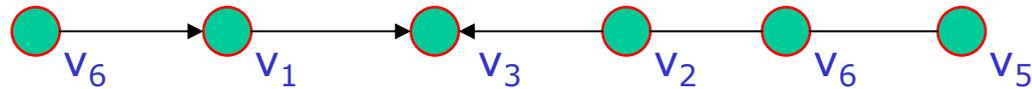
INSIEME DEI NODI DI W : $V(W) = \{V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{ip}\}$

INSIEME DEGLI ARCHI DI W : $A(W) = \{(V_{i1}, V_{i2}), (V_{i2}, V_{i3}), \dots, (V_{ip-1}, V_{ip})\}$

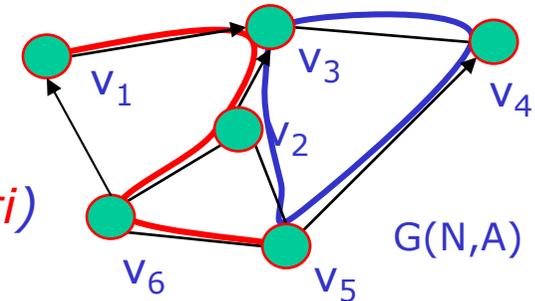
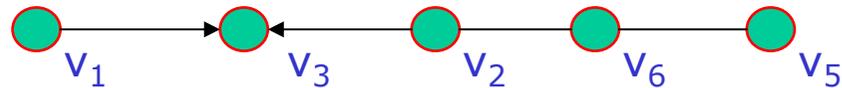
- V_{i1} e V_{ip} si dicono NODI ESTREMI DEL "WALK"
- $\{V_{i2}, \dots, V_{ip-1}\}$ si dicono NODI INTERNI DEL "WALK"
- Archi e nodi possono essere ripetuti
- Se $V_{i1} \equiv V_{ip}$ (nodi estremi coincidenti) il "WALK" si dice CHIUSO altrimenti si dice APERTO

Strutture Speciali: "Trail", Cammini e Cicli

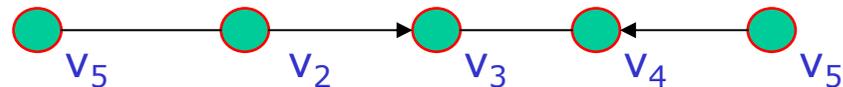
"TRAIL" \Rightarrow "WALK" in $G(N,A)$ senza archi ripetuti



CAMMINO \Rightarrow "TRAIL" in $G(N,A)$ senza nodi interni ripetuti



CICLO \Rightarrow CAMMINO CHIUSO (nodi estremi coincidenti)

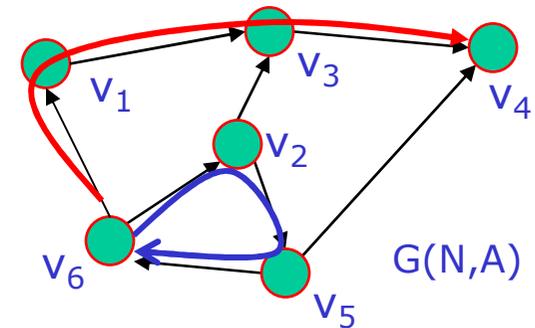
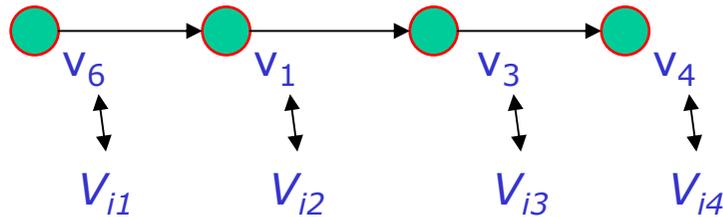


Grafi Orientati: Cammini e Cicli Orientati

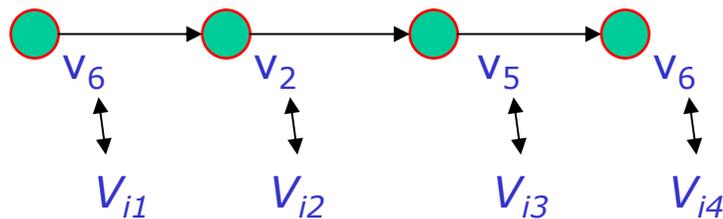
CAMMINO ORIENTATO \Rightarrow

CAMMINO $P=(V_{i1}, (V_{i1}, V_{i2}), V_{i2}, (V_{i2}, V_{i3}), \dots, (V_{ip-1}, V_{ip}), V_{ip})$ con:

V_{ik} coda di (V_{ik}, V_{ik+1}) per ogni $k=1, \dots, p-1$



CICLO ORIENTATO \Rightarrow **CAMMINO ORIENTATO CHIUSO**

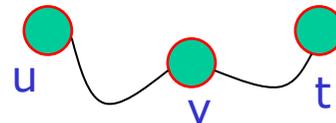


Connessione

u CONNESSO A $v \Leftrightarrow$ *Esiste un cammino con estremi u e v*

"Connesso a": Relazione di Equivalenza \mathcal{R}

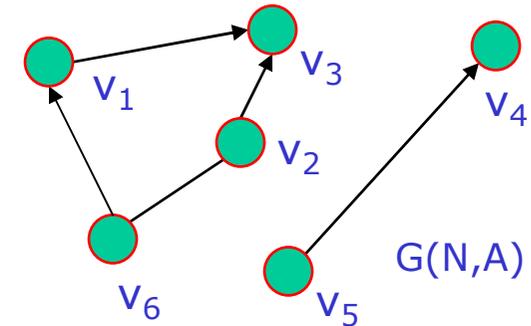
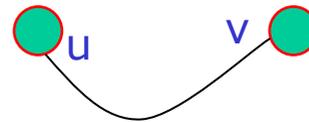
transitiva: $u\mathcal{R}v \wedge v\mathcal{R}t \Rightarrow u\mathcal{R}t$



riflessiva: $u\mathcal{R}u$



simmetrica: $u\mathcal{R}v \Leftrightarrow v\mathcal{R}u$



ESEMPI

v_1 connesso a v_2

v_3 connesso a v_6

v_4 connesso a v_5

v_3 non connesso a v_5

Nodi e Coppie di nodi partizionabili in Classi di Equivalenza

RICORDO

Data una relazione di equivalenza $\mathcal{R} \subseteq N \times N$ e detto $\mathcal{R}(u) = \{v \in N : v\mathcal{R}u\}$

$C \subseteq N$ è una CLASSE DI EQUIVALENZA $\Leftrightarrow C \equiv \mathcal{R}(u) \forall u \in C$

N si partiziona in classi di equivalenza: $N = C_1 \cup \dots \cup C_t \wedge C_h \cap C_k = \emptyset \quad k \neq h$

\mathcal{R} Relazione di Equivalenza $\Leftrightarrow (u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \exists C_h : u, v \in C_h)$

Componenti Connesse

u CONNESSO A $v \iff$ *Esiste un cammino con estremi u e v*

\mathcal{R} "Connesso a": Relazione di Equivalenza

Nodi partizionabili in *classi di equivalenza*: $\{C_1, \dots, C_t\}$

$$\begin{cases} N = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t \\ C_h \cap C_k = \emptyset \quad 1 \leq h < k \leq t = c(G) \end{cases}$$

Coppie di nodi connesse *se e solo se* appartengono alla stessa *classe di equivalenza*.

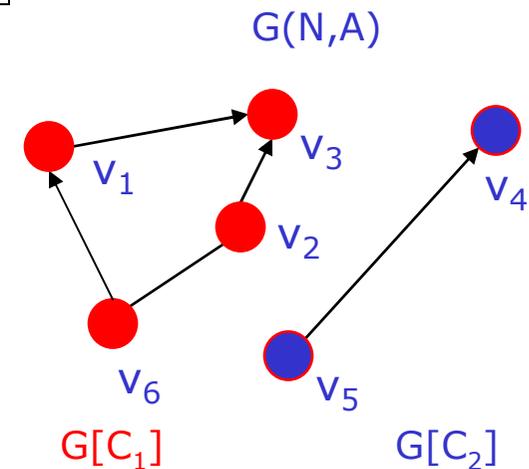
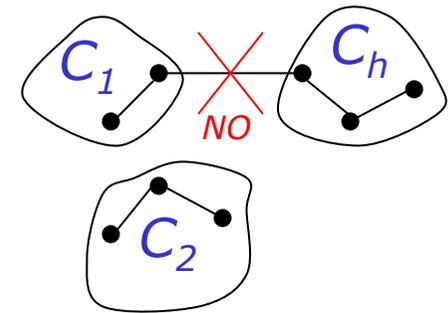
$$\begin{cases} \{u, v\} \in C_h \Rightarrow u \text{ connesso a } v \\ u \in C_h \wedge v \in C_k \wedge k \neq h \Rightarrow u \text{ non connesso a } v \end{cases}$$

$G[C_h]$ COMPONENTE CONNESSA DI $G(N, A)$

Sottografo indotto da una classe di equivalenza

$c(G) = 1$ Grafo **CONNESSO**

$c(G) > 1$ Grafo **NON-CONNESSO**

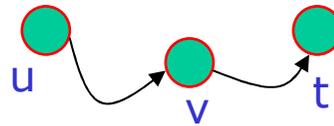


Cammini orientati e Connessione

$u \mathcal{R} v \Leftrightarrow$ Esiste un CAMMINO ORIENTATO da u a v

\mathcal{R} Non è una Relazione di Equivalenza

transitiva: $u \mathcal{R} v \wedge v \mathcal{R} t \Rightarrow u \mathcal{R} t$



riflessiva: $u \mathcal{R} u$

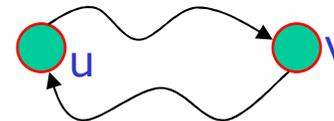


non simmetrica:



Cosa fare?

Rendiamo simmetrica la relazione richiedendo la *contemporanea esistenza* di un cammino orientato da u a v e di uno da v ad u



DEFINIAMO

Nuova relazione di equivalenza \mathcal{R}^F : $u \mathcal{R}^F v \Leftrightarrow v \mathcal{R} u \wedge u \mathcal{R} v$

$u \mathcal{R}^F v \Leftrightarrow u$ **FORTEMENTE CONNESSO** a v

Connessione Forte

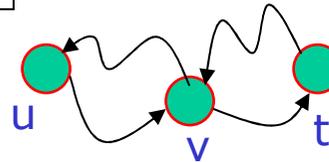
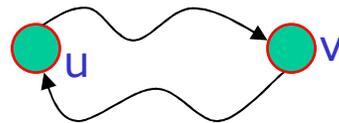
$u \mathcal{R}^F v \Leftrightarrow u$ FORTEMENTE CONNESSO a v
 \Leftrightarrow Esiste un CAMMINO ORIENTATO da u a v e
 un CAMMINO ORIENTATO da v a u

\mathcal{R}^F è una Relazione di Equivalenza

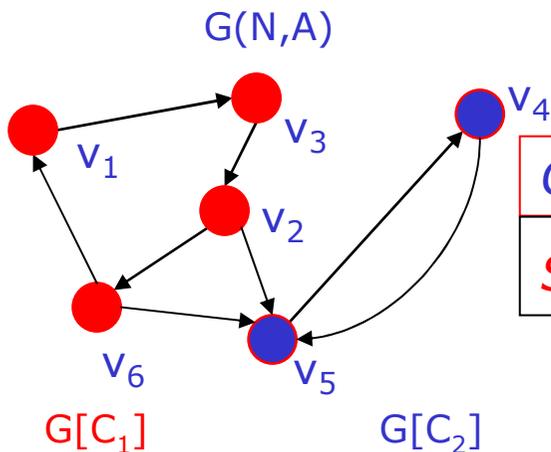
transitiva: $u \mathcal{R}^F v \wedge v \mathcal{R}^F t \Rightarrow u \mathcal{R}^F t$

riflessiva: $u \mathcal{R}^F u$

simmetrica:



Nodi partizionabili in *classi di equivalenza* di $\mathcal{R}^F : \{C_1, \dots, C_t\}$

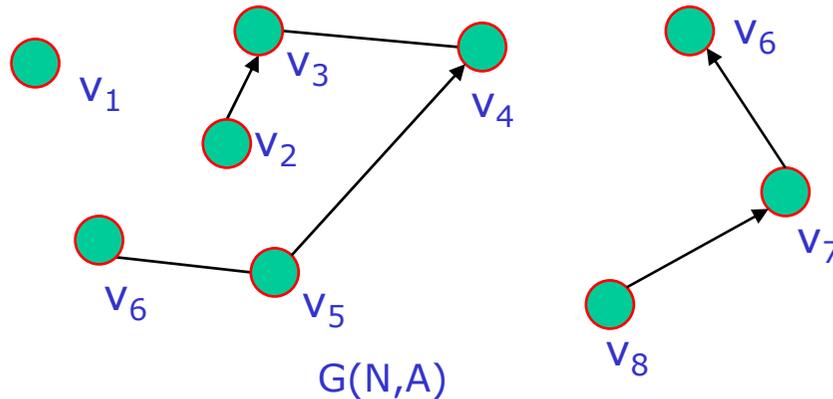


$G[C_h]$ COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA DI $G(N,A)$

Sottografo indotto da una classe di equivalenza di \mathcal{R}^F

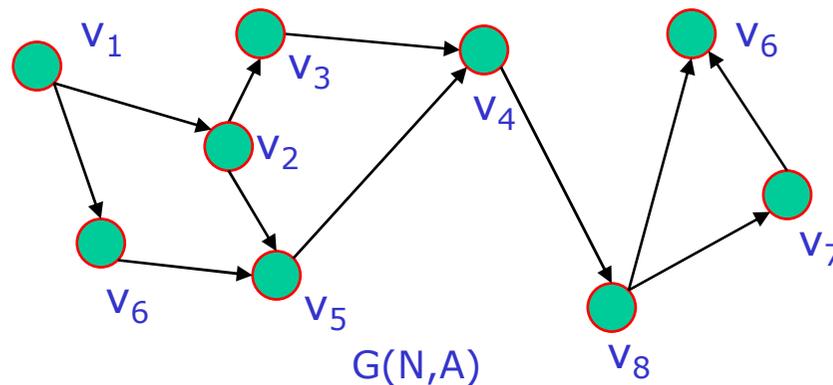
Grafi Aciclici e Alberi

GRAFO ACICLICO (FORESTA) \Rightarrow Grafo senza cicli



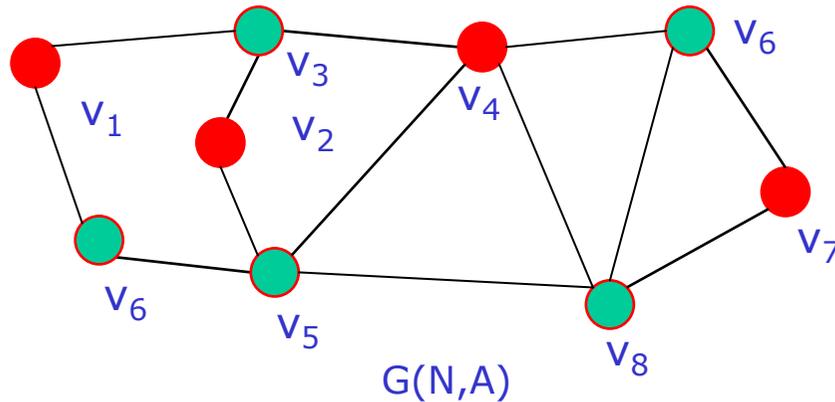
GRAFO ACICLICO CONNESSO \Rightarrow ALBERO

GRAFO ACICLICO ORIENTATO (DAG) \Rightarrow Grafo senza cicli orientati



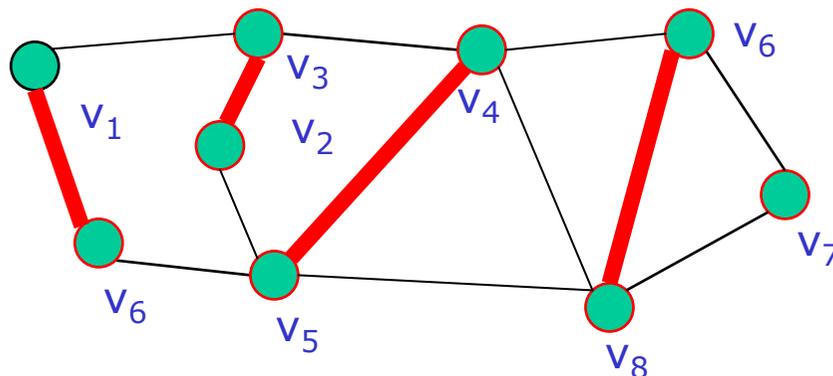
Insiemi Stabili e "matching"

Insieme **STABILE** \Rightarrow Insieme di *odi* a coppie non adiacenti



odi indipendenti

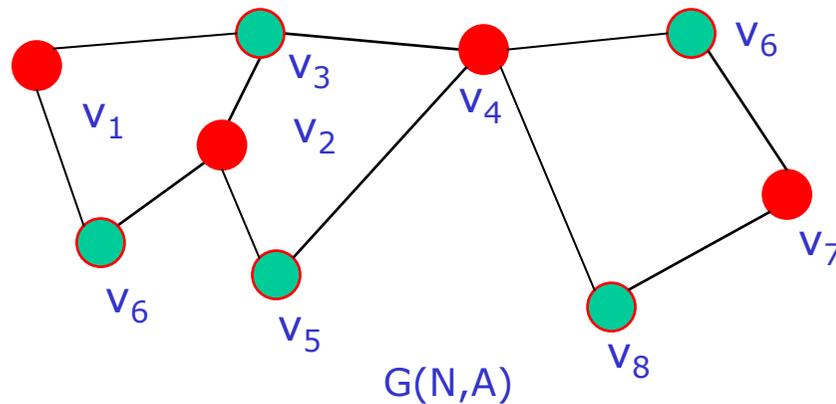
"Matching" \Rightarrow Insieme di *archi* a coppie non adiacenti



archi indipendenti

Grafi Bipartiti

Grafo Bipartito \Leftrightarrow *Insieme dei nodi partizionato in due insiemi stabili*



Grafo Bipartito \Leftrightarrow *Non contiene cicli con un numero **dispari** di nodi*

Provate a dimostrarlo

Autovalutazione Teoria dei Grafi

- 2.1 *Vero o Falso? Rimuovendo un taglio da un grafo connesso si ottiene un grafo con due componenti connesse. Il motivo?*
- 2.2 *Quanti archi può possedere, al massimo, un grafo con 5 nodi.*
- 2.3 *COMPLETARE LA DEFINIZIONE SEGUENTE:
Albero Ricoprente di $G(N,A)$: è un sottografo di $G(N,A)$...*
- 2.4 *Dimostrare che un DAG contiene un nodo con stella uscente vuota.*
- 2.5 *Dimostrare che aggiungendo un arco di A ad un albero ricoprente di $G(N,A)$, si genera un sottografo di $G(N,A)$ contenente un ciclo.*
- 2.6 *Dimostrare che in un grafo $G(N,A)$ la somma dei gradi dei nodi è pari al doppio del numero degli archi*
$$\sum_{u \in N} d(u) = 2|A|$$
- 2.7 *Dimostrare che una Componente Fortemente connessa G' di un grafo orientato G contiene un Ciclo Orientato Ricoprente di G' .*