Ottimizzazione Combinatoria

Metodi Euristici – L'algoritmo "Greedy"

ANTONIO SASSANO

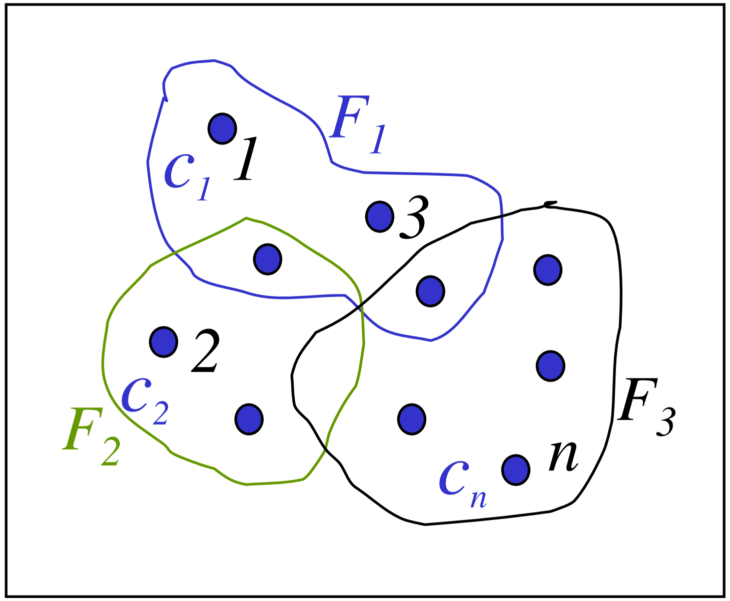
Università di Roma"La Sapienza"
Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Roma, 2010

Problemi di OC con funzione obiettivo <u>lineare</u>

- Insieme base $\Gamma=\{1,2,\ldots,n\}$ *(eventi elementari)*
  (*es.* progetto *i* <u>attivato</u>, nodo *i* <u>scelto</u>, connessione *i* <u>stabilita</u>)
- Costi (Vantaggi) <u>elementari</u> $\{c_i$ associati agli elementi di $\Gamma\}$
- <u>*Soluzione Ammissibile*</u> = Opportuno sottoinsieme $F_1 \subseteq \Gamma$
  (*es.* sottoinsieme di progetti attivati che soddisfano il "budget")
- <u>*Costo di una soluzione*</u> F_1 = <u>*somma dei costi elementari*</u> degli elementi di F_1

$$\boxed{c(F_1)=\sum_{i\in F_1} c_i}$$



- Insieme delle soluzioni ammissibili
  $\mathcal{S}=\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

<u>Problema:</u>

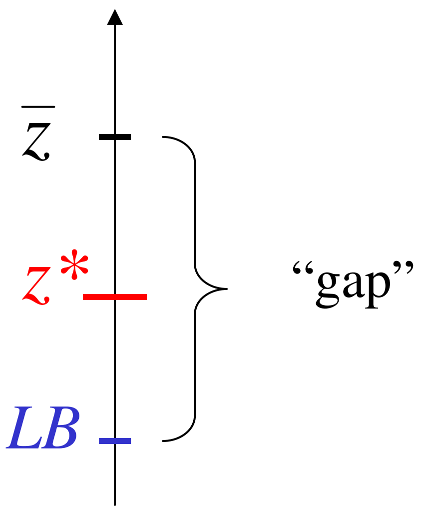
$$\boxed{min\ \{c(F):\ F\in \mathcal{S}\}}$$

Soluzioni e "Certificati"

$\bar{x} \in S$ *soluzione ammissibile* $\qquad c'\bar{x} = \bar{z}$ *valore della soluzione*

$c'x^* = z^*$ *valore ottimo*

Lower bound $LB \leq z^*$ = "certificato di qualità" per $\bar{x}$:



Riduzione del "gap" :

1. Miglioramento del "lower bound"
2. Miglioramento (riduzione) di $\bar{z}$

Tecniche di ricerca nell'insieme delle soluzioni

Tecniche euristiche (ευρισκειν = *trovare*)

- Algoritmo Avido ("Greedy")
- Ricerca Locale ("Local Search")
- Algoritmi Genetici

Algoritmo Avido ("Greedy")

- Insieme base $\Gamma=\{1,2,\ldots,n\}$ *(eventi elementari)*
- Insieme delle soluzioni ammissibili $\mathcal{S}=\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ $(F_i \subseteq \Gamma)$

- T ***soluzione parziale*** $\Leftrightarrow$ $T \subseteq F_i \in \mathcal{S}$

- Costo di una soluzione F = $c(F) = \sum_{i \in F} c_i$

Idea base

Costruire una sequenza di soluzioni parziali $T_0, T_1, T_2, T_3 \ldots$:

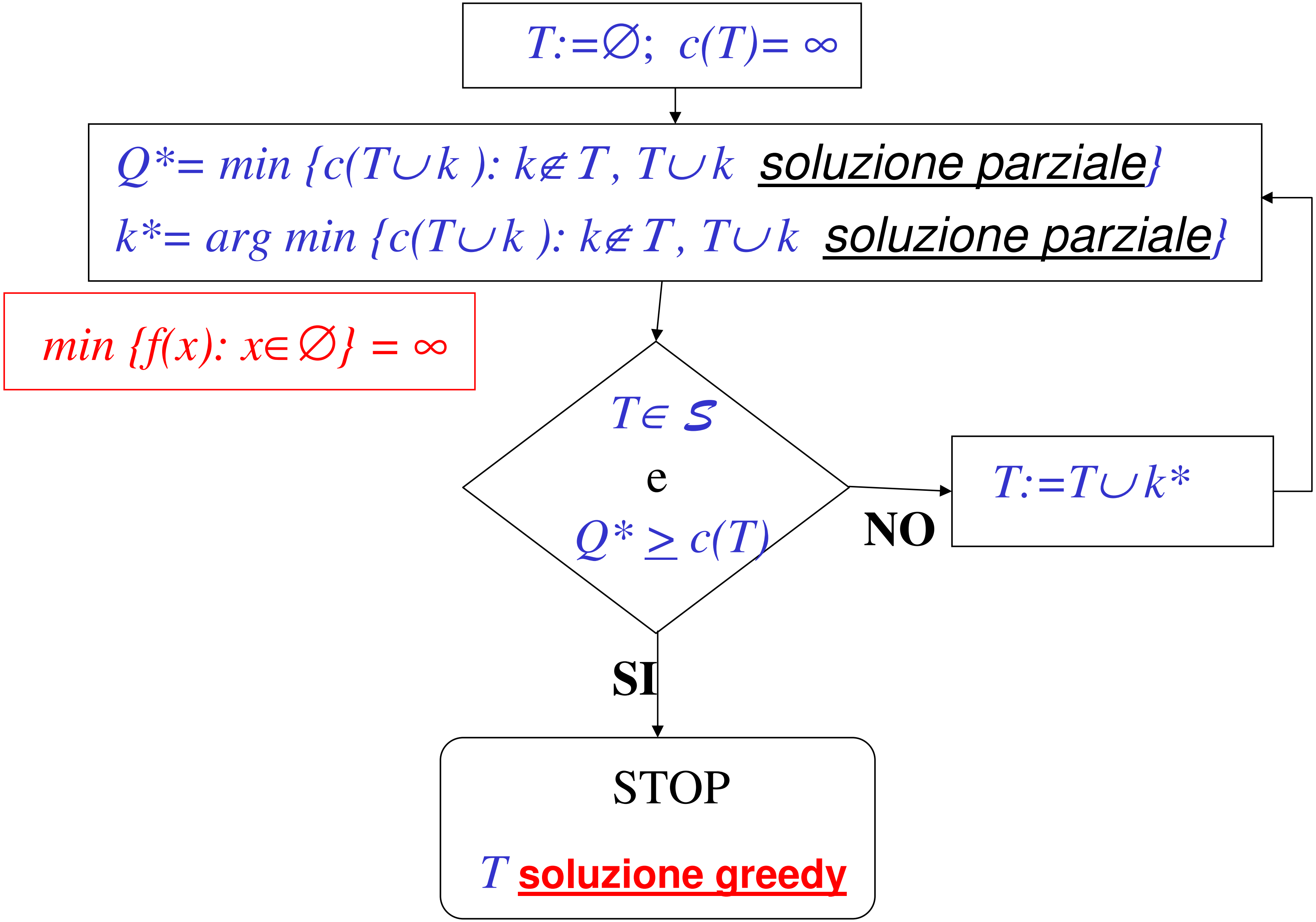
a. a partire dall' insieme vuoto (*soluzione parziale* T_0)

b. aggiungendo, ad ogni passo, l'elemento che produce la soluzione parziale con il minimo costo.

c. arrestandosi quando le *seguenti condizioni sono soddisfatte*:

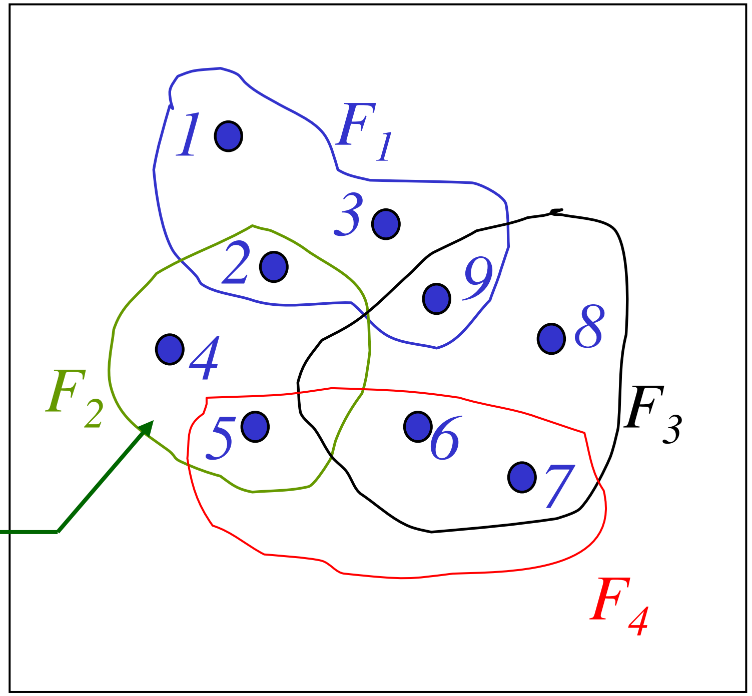
1. la soluzione parziale corrente è ammissibile;
2. ogni soluzione parziale ottenuta aggiungendo un nuovo elemento ha un valore maggiore della funzione obiettivo.

Algoritmo Avido ("Greedy") - Flow chart



Esempio ("Greedy")

$$c = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$T_0 = \{\}$	$c(T_0)=0$
$T_1 = \{4\}$	$c(T_1)=-3$
$T_2 = \{4,2\}$	$c(T_2)=-2$
$T_3 = \{4,2,5\}$	$c(T_3)=-1$

$T_3 = F_2$

$c(\{4,2\}) > c(\{4,1\})$ ma $\{4,1\}$ non è una soluzione parziale

$T_3 \cup k$ *non è una soluzione parziale per ogni* $k \notin T_3$

Esempio 2 : *pianificazione investimenti*

	GEN	FEB	MAR	APR	MAG
1	10.000	5.000	-10.000	-10.000	-10.000
2	3.000	-10.000	10.000	-5.000	-5.000
3	8.000	2.000	-5.000	-10.000	-15.000
4	10.000	5.000	-10.000	-20.000	-10.000
5	12.000	15.000	-30.000	10.000	-50.000
Budget	20.000	20.000	20.000	10.000	10.000

$c =$

-18
-8
-10
-18
-20

$S =$

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
1		•					•	•	•					
2			•				•			•	•	•		
3				•				•		•			•	•
4					•				•		•		•	
5						•						•		•
c(F)	0	-18	-8	-10	-18	-20	-26	-28	-36	-18	-26	-28	-28	-30

Esempio 2 : *pianificazione investimenti (II)*

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
1		•					•	•	•					
2			•				•			•	•	•		
3				•				•		•			•	•
4					•				•		•		•	
5						•						•		•
c(F)	0	-18	-8	-10	-18	-20	-26	-28	-36	-18	-26	-28	-28	-30

- Ogni progetto (elemento) costituisce una *soluzione (parziale)*;
- Il progetto (elemento) ***5*** ha peso minimo (-20) … **lo scelgo**;
- $T = \{5\}$
- Provo ad aggiungere gli elementi $k \notin T$

$$Q^* = \min \{ c(T \cup k): k \notin T,\ T \cup k \text{ soluzione parziale} \}$$

- Le uniche due soluzioni (parziali) che contengono l'elemento ***5*** sono la F_{11} e la F_{12} $\Rightarrow$ $Q^* = \min \{ c(F_{11}), c(F_{12}) \} = -30$

Esempio 2 : *pianificazione investimenti (III)*

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}
1		•					•	•	•					
2			•				•			•	•	•		
3				•				•		•			•	•
4					•				•		•		•	
5						•						•		•
c(F)	0	-18	-8	-10	-18	-20	-26	-28	-36	-18	-26	-28	-28	-30

$F_{13} \cup \{k\}$ non è una ***soluzione parziale per ogni*** $k \notin F_{13}$

- $F_{13}=\{3,5\}$ è la ***soluzione "greedy"*** (valore ***-30***)
- ***ma …*** $F_8 = \{1,4\}$ è la ***soluzione ottima*** (valore ***-36***)
- La scelta dell'elemento ***5*** *condiziona la soluzione finale*

Esempio 3 - Localizzazione

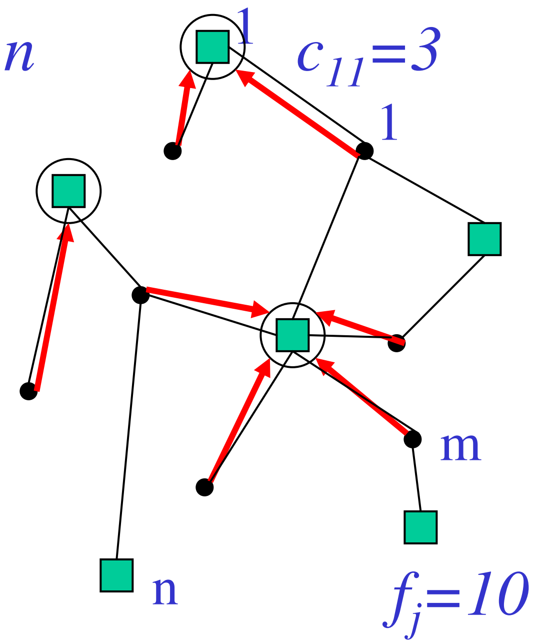
DATI

Insieme J di siti (localizzazioni) potenziali; $|J|=n$

Insieme I dei clienti; $|I|=m$

Costo c_{ij} di afferenza del cliente i al sito j

Costo f_j di attivazione del sito j



TROVARE

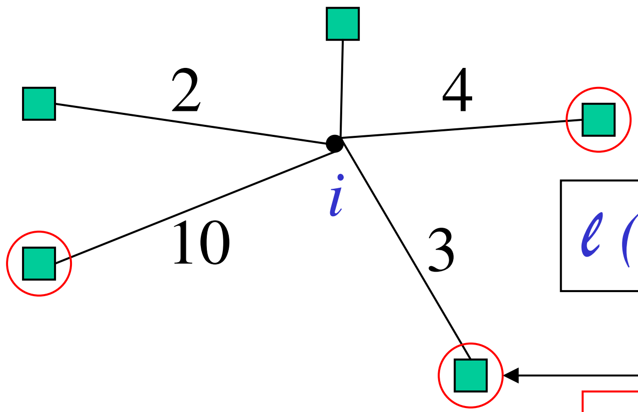
- Insieme J^* dei siti da attivare
- Assegnazione di <u>ciascun cliente</u> ad uno dei siti attivati

Che minimizzano il <u>costo complessivo</u> di attivazione e afferenza

Localizzazione - Obiettivo e Soluzioni

Osservazione

Il costo complessivo di attivazione e afferenza dipende esclusivamente dall'insieme di siti attivati $T \neq \emptyset$



$\ell(T,i)$ sito ottimale per il cliente i

$\ell(T,i) = \arg\min \{c_{ij} : j \in T\}$

$$Z(T) = \sum_{j \in T} f_j + \sum_{i \in I} c_{i\,\ell(T,i)}$$

Insieme delle soluzioni ammissibili $\mathcal{S} = 2^J - \{\emptyset\}$

Insieme delle <u>soluzioni parziali</u> $\mathcal{P} = 2^J$

Esempio 3 - Localizzazione

$$c = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

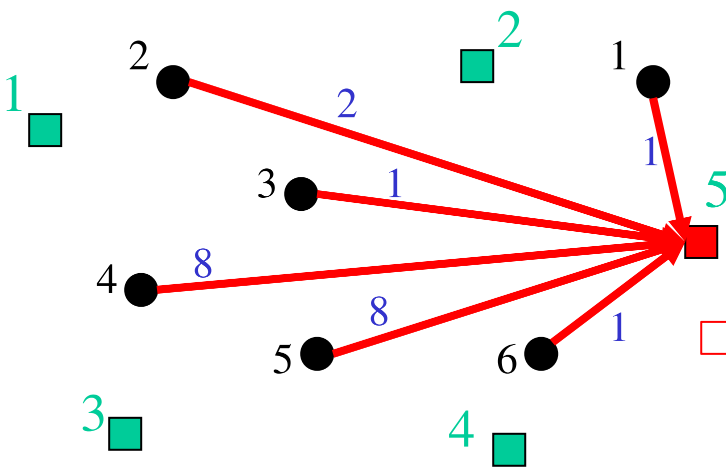
$$T := \varnothing$$

$$\begin{bmatrix} Z(\{1\}) & Z(\{2\}) & Z(\{3\}) & Z(\{4\}) & Z(\{5\}) \\ \hline 39 & 31 & 32 & 29 & 28 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q^* = 28 < Z(T) = \infty}$$

$$\boxed{T := T \cup \{ 5 \}}$$



$$\boxed{21} + 7$$

Esempio “Greedy” - Localizzazione

$$c=\begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

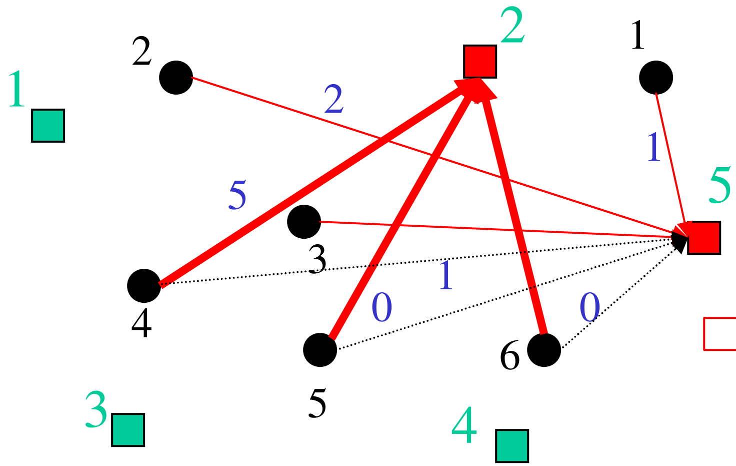
$$T := \{\ 5\ \}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} Z(\{5,1\}) & Z(\{5,2\}) & Z(\{5,3\}) & Z(\{5,4\}) & - \\ \hline 27 & 19 & 20 & 29 & - \end{array}\right]$$

$$f = [4 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 7]$$

$$Q^* = 19 < Z(\ \{\ 5\}\ ) = 28$$

$$T := T \cup \{\ 2\ \}$$



$$\boxed{9} + 7+3$$

Esempio "Greedy" - Localizzazione

$$c = \begin{bmatrix} 12 & \boxed{13} & \boxed{6} & 0 & \boxed{1} \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

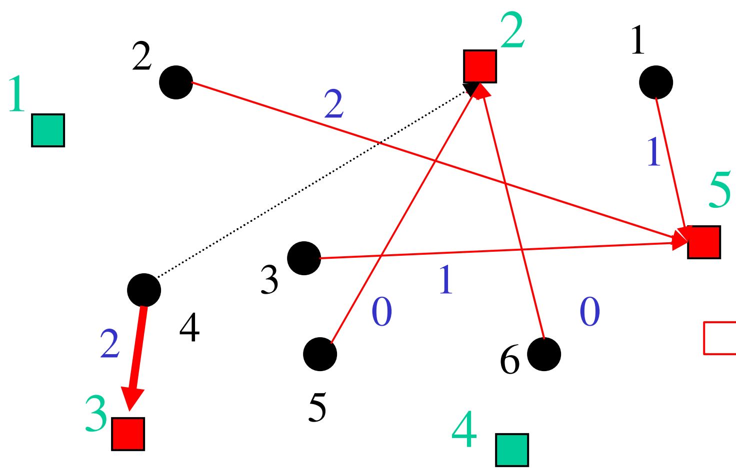
$T := \{\ 5,2\ \}$

$$\begin{bmatrix} Z(\{5,2,1\}) & - & Z(\{5,2,3\}) & Z(\{5,2,4\}) & - \\ \hline 21 & - & 17 & 20 & - \end{bmatrix}$$

$f = [4 \quad \boxed{3} \quad \boxed{1} \quad 4 \quad \boxed{7}]$

$Q^* = 17 < Z(\ \{5,2\}\ ) = 19$

$T := T \cup \{\ 3\ \}$



$\boxed{6} + 7+3+1$

Esempio “Greedy” - Localizzazione

$$c = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 10 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

T := { 5,2,3 }

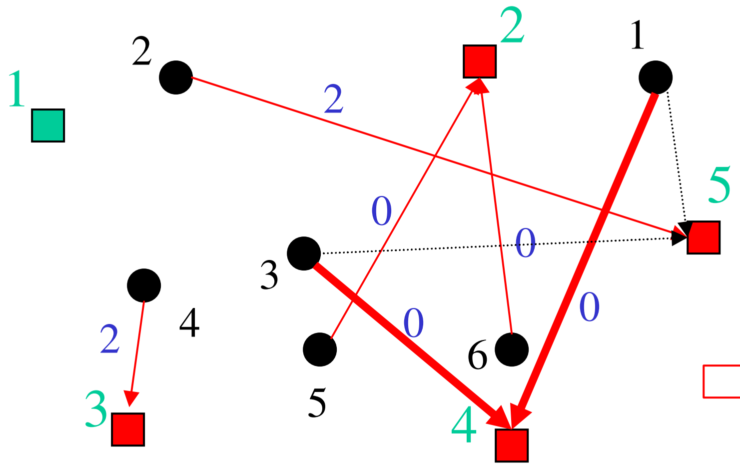
$$\left[\begin{array}{cccccc} Z(\{5,2,3,1\}) & - & - & Z(\{5,2,3,4\}) & - \\ \hline 21 & - & - & 18 & - \end{array}\right]$$

$$f = [4 \quad \boxed{3} \quad \boxed{1} \quad \boxed{4} \quad \boxed{7}]$$

$\boxed{Q^* > Z(\{5,2,3\}) = 17}$

T := { 5,2,3 }∈ S

soluzione greedy



⇒ $\boxed{3}$ + 7+3+1+4