Ottimizzazione Combinatoria
Sistemi di Indipendenza

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma “La Sapienza”

A.A. 2010

Sistemi di Indipendenza

- Insieme base $\Gamma = \{1,2,\ldots,n\}$ *(elementi)*
- Insieme delle **soluzioni ammissibili**

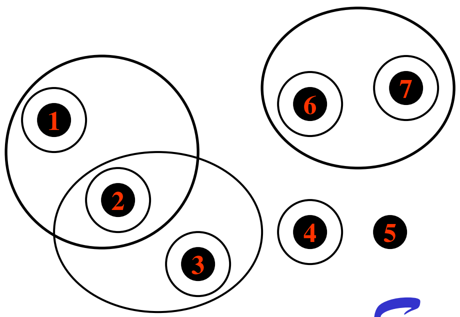
$$\mathcal{S} = \{ F_1 , F_2 , \ldots , F_m \} \qquad (F_i \subseteq \Gamma)$$

- $\mathcal{S}$ ***Sistema di Indipendenza*** (*Independence System*)

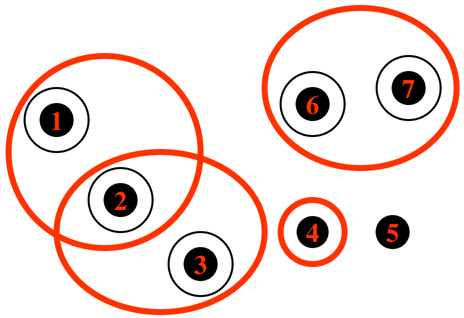
  $\Leftrightarrow \quad T \subseteq F_i \quad \Rightarrow \quad T \in \mathcal{S}$

- B è una ***Base di*** $\mathcal{S} \Leftrightarrow B \in \mathcal{S} \wedge T \supset B \Rightarrow T \notin \mathcal{S}$

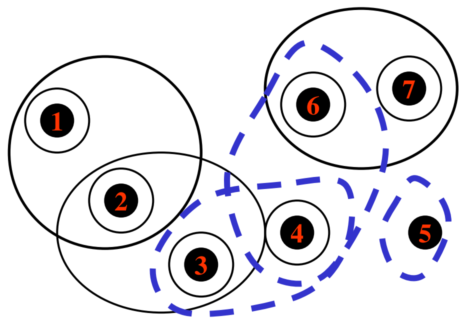
- C è un ***Circuito di*** $\mathcal{S} \Leftrightarrow C \notin \mathcal{S} \wedge T \subset C \Rightarrow T \in \mathcal{S}$



$\mathcal{S}$



Basi

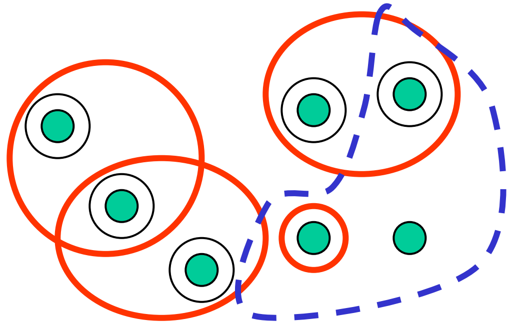


Circuiti

Sistemi di Indipendenza

$T \in \mathcal{S} \Rightarrow T$ è un **indipendente** di $\mathcal{S}$

$T \notin \mathcal{S} \Rightarrow T$ è un **dipendente** di $\mathcal{S}$



Le basi **definiscono** il sistema di indipendenza

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{\, T \subseteq B : B$ **Base di** $\mathcal{S} \,\}$

Indipendenti = sottoinsiemi di Γ ***contenuti in qualche base***

.. anche i circuiti **definiscono** il sistema di indipendenza

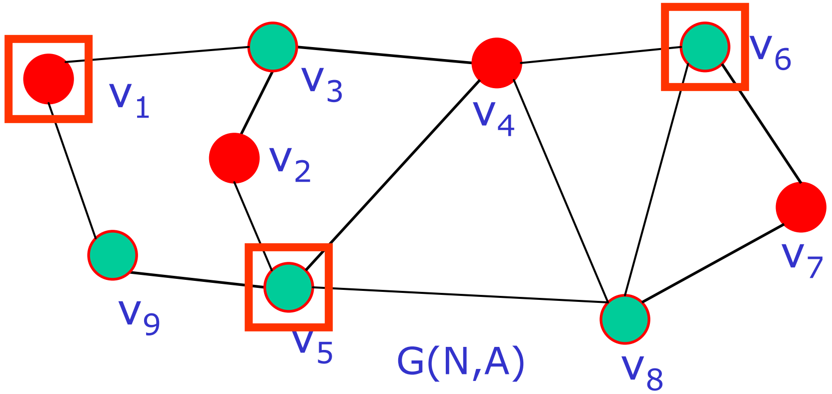
$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{\, C \not\subset T : C$ **Circuito di** $\mathcal{S} \,\}$

Indipendenti = sottoinsiemi di Γ che ***non contengono un circuito*** (ogni dipendente contiene un circuito)

Sistemi di Indipendenza (esempio 1)

$\mathcal{S}$ = {***insiemi stabili di un grafo*** $G(V,E)$}

Insiemi di **nodi** a coppie ***non adiacenti***



Elementi = nodi

$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots\}$

Circuiti = $v_i v_h \in E$

T ***non stabile*** $\Leftrightarrow$ ***contiene*** gli ***estremi di un arco***

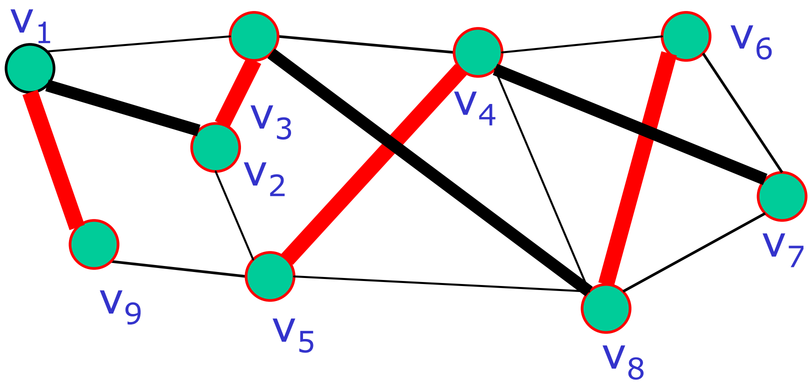
Basi = stabili massimali

T ***massimale*** $\Leftrightarrow$ ***non contenuto propriamente*** in uno stabile

Sistemi di Indipendenza (esempio 2)

S = {"matching" di un grafo $G(V,E)$}

Insiemi di **archi** a coppie ***non incidenti nello stesso nodo***



Elementi = archi

$S = \{\varnothing, \{v_1v_2\}, \{v_3v_8\}, \{v_1v_2, v_3v_8\}, \ldots\}$

Circuiti = $\{e_i, e_h\}$ **con** e_i, e_h ***incidenti nello stesso nodo***

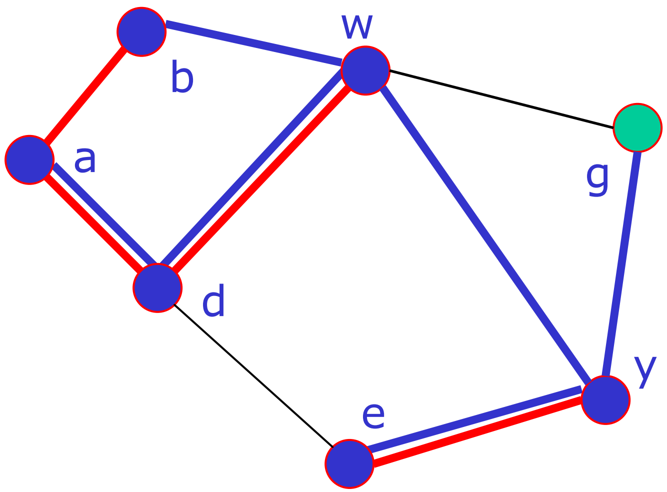
T non è un "matching" $\Leftrightarrow$ (*almeno*) ***due archi incidenti***

Basi = "matching" massimali

(che non sono contenuti propriamente in un "matching")

Sistemi di Indipendenza (esempio 3)

S = {insiemi di foreste di un grafo $G(V,E)$}



Elementi = archi

$G(V,E)$ foresta $\wedge$ $F \subseteq E$
$\Rightarrow$ $H(V,F)$ foresta

Notazione: $G(V,F)$ foresta
$\Leftrightarrow$ F foresta

Circuito = ciclo

F non è una foresta $\Leftrightarrow$ F contiene un ciclo

Base = albero ricoprente

Sistemi di Indipendenza (esempio 4)

$\mathcal{S}$ = {insiemi di vettori linearmente indipendenti }

$$\Gamma = \{v^1, v^2, \dots, v^t\} \subseteq R^n$$

Elementi = vettori

$$Q \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{j \in Q} \lambda_j v^j = 0_n \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j$$

linearmente indipendenti

Circuito =
insieme minimale di vettori linearmente dipendenti

Base =
insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

$B = \{v^1, v^3, v^4\}$

Base

	v^1	v^2	v^3	v^4	v^5
1	**-1**	-1	**0**	**0**	0
2	**1**	0	**-1**	**-1**	0
3	**0**	1	**1**	**0**	-1
4	**0**	0	**0**	**1**	1

$C = \{v^1, v^2, v^3\}$

Circuito

	v^1	v^2	v^3	v^4	v^5
1	**-1**	**-1**	**0**	0	0
2	**1**	**0**	**-1**	-1	0
3	**0**	**1**	**1**	0	-1
4	**0**	**0**	**0**	1	1

Sistemi di Indipendenza (esempio 5)

$\mathcal{S}$ = { insiemi di progetti "compatibili" con un "budget"}

$$3x_1+2x_2+x_3+\boxed{2}x_4 \leq \boxed{5}$$

Elementi = progetti

"risorse" per il progetto

"budget"

$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\} \ldots \}$

Indipendenti = soluzioni di "knapsack" a coefficienti positivi

Circuito = un insieme di progetti non "compatibile"

$\{1, 2, 3\}$ ma tale che ogni sottoinsieme è "compatibile"

Base = insieme di progetti "compatibile" massimale

$\{1, 4\}$

Sistemi di Indipendenza (esempio 5)

$\mathcal{S}$ = { sotto-sistemi di disequazioni ammissibili }

Elementi = disequazioni

(a) $x_1 - x_2 \leq 1$
(b) $x_2 - x_3 \leq -3$
(c) $x_3 - x_1 \leq 1$
(d) $x_1 - x_4 \leq -2$
(e) $x_4 - x_5 \leq 1$
(f) $x_5 - x_1 \leq 0$

non ammissibile

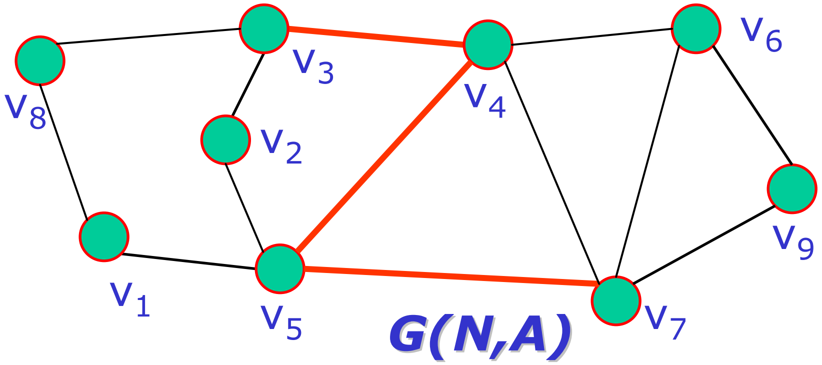
Circuito = un insieme di disequazioni non ammissibile
{a,b,c} ma tale che ogni sottoinsieme è ammissibile

Base = insieme di disequazioni ammissibile massimale
{a,b,e,f}

Sistemi di Indipendenza (esempio 6)

Grafo connesso $G(N,A)$

$\mathcal{S}$ = { insiemi di archi la cui rimozione non disconnette il grafo $G(N,A)$ }



Elementi = archi

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{v_1v_8\}, \{v_1v_8, v_2v_3\}, \ldots \}$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \overline{T})$ connesso

Circuiti = Tagli minimali

(non contengono propriamente un taglio)

Base = Complemento di un albero ricoprente

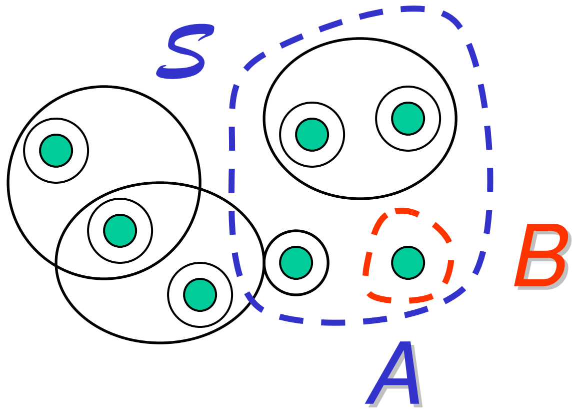
Sistemi di Indipendenza - Rango

$r(X)$ **rango** di un sottoinsieme $X \subseteq \Gamma$

$= \max \{ \, |T| : T \subseteq X, \, T$ è un **indipendente** di $\mathcal{S}$ $\}$

- $r(\emptyset) = 0$ e per $X, Y \subseteq \Gamma$
- $r(X) \leq r(Y)$ se $X \subseteq Y$ [non-decrescente]
- $r(X) = |X|$ se e solo se $X \in \mathcal{S}$
- $r(X) = |X| - 1 \wedge r(X - \{e\}) = |X| - 1 \ \forall e \in X$

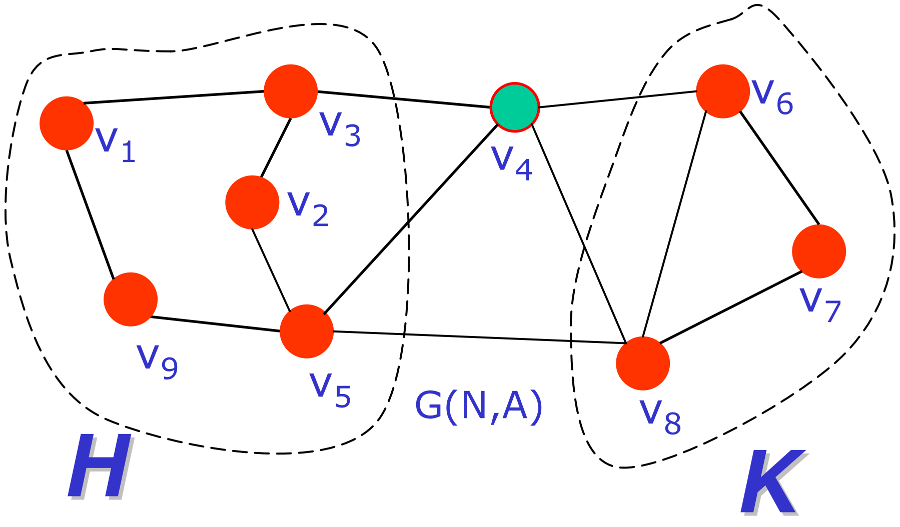
  se e solo se X è un circuito



$r(A)=2$

$r(B)=0$

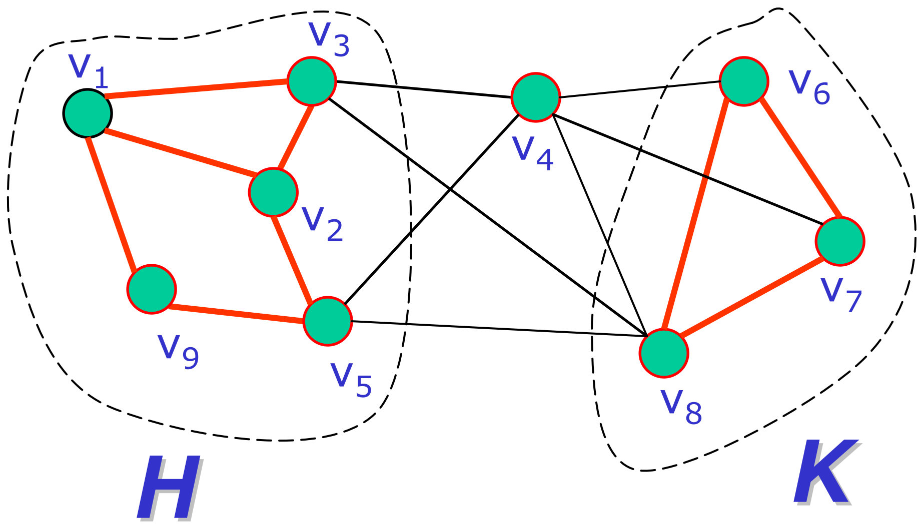
Sistemi di Indipendenza – Rango (esempi)



Insiemi stabili

- $r(X) = \alpha(X)$
  numero di stabilità

- $r(H) = 2$ (ciclo)
- $r(K) = 1$ ("clique")

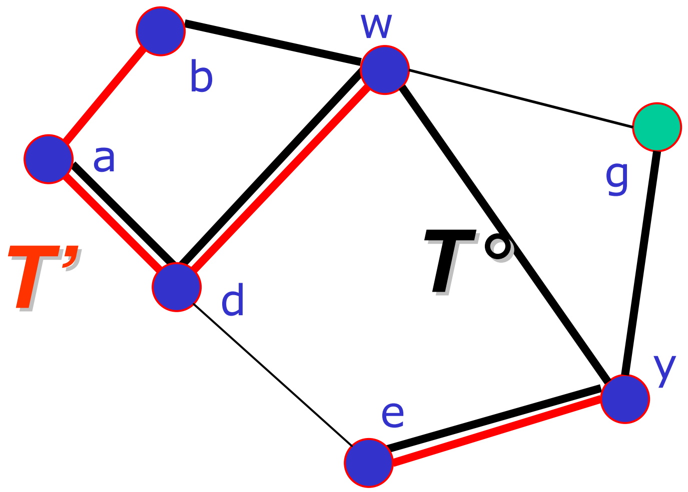


"matching"

- $r(X) = \nu(X)$
  "matching number"

- $r(H) = 2$
- $r(K) = 1$

Sistemi di Indipendenza – Rango (esempi)



Foreste

- $r(T') = 4$
- $r(T°) = 6$ ("spanning tree")

Pianificazione degli Investimenti o "knapsack"

$$3x_1+2x_2+x_3+2x_4 \leq 5$$

$H = \{1, 2, 3\}$

$K = \{1, 2\}$

- $r(H) = 2$
- $r(K) = 2$

Sistemi di Indipendenza – Rango (esempi)

Sotto-sistemi di *disequazioni ammissibili*

$$\begin{array}{ll}
(a) & x_1 - x_2 \leq 1 \\
(b) & x_2 - x_3 \leq -3 \\
(c) & x_3 - x_1 \leq 1 \\
(d) & x_1 - x_4 \leq -2 \\
(e) & x_4 - x_5 \leq 1 \\
(f) & x_5 - x_1 \leq 0
\end{array}$$

non ammissibile

ammissibile

$$\begin{array}{ll}
(a) & x_1 - x_2 \leq 1 \\
(b) & x_2 - x_3 \leq -3 \\
(d) & x_1 - x_4 \leq -2 \\
(e) & x_4 - x_5 \leq 1
\end{array}$$

$r(\{a, b, c\}) = 2$ (circuito)

$r(\{d, e, f\}) = 2$ (circuito)

$\boxed{r(\{a, b, d, e\}) = 4}$ (base)

$r(\{a, b, c, d, e\}) = 4$

Massimo Sottoinsieme Indipendente

max { c(F): F è un indipendente di $\mathcal{S}$ }

Problema di ***Ottimizzazione Combinatoria*** con *funzione obiettivo lineare*

F^* ottimo $\Rightarrow c(F^*) \geq c(F) \quad F \in \mathcal{S}$

$h \in F^* \Rightarrow C_h \geq 0$ [se $C_h < 0 \Rightarrow c(F^* - \{h\}) > c(F^*)$ CONT.]

$\Rightarrow$ possiamo **eliminare** gli elementi con **peso negativo**

Esempi:

- ***Insieme stabile (o "matching")*** *di massimo peso*
- ***Albero ricoprente*** *di massimo peso*
- ***Insieme di archi*** *di costo massimo che* ***non sconnette*** *il grafo*
- ***Insieme di archi*** *di costo minimo* ***di un sottografo connesso*** *(complemento del precedente)*
- ***Soluzioni di "knapsack" a coefficienti positivi*** *insieme di progetti a vantaggio massimo*

Il Rango caratterizza $\mathcal{S}$

TEOREMA I1:

$$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow |\, F \cap X \,| \leq r(X) \quad \forall\ X \subseteq \Gamma$$

DIMOSTRAZIONE:

Se $F \in \mathcal{S} \Rightarrow (F \cap X) \in \mathcal{S}\ \forall\ X \subseteq \Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow |\, F \cap X \,| = r(F \cap X) \leq r(X)\ \forall\ X \subseteq \Gamma$

rango non decrescente

Per il viceversa dobbiamo dimostrare che:

$$F \notin \mathcal{S} \Rightarrow \exists\ X \subseteq \Gamma : |\, F \cap X \,| > r(X)$$

e infatti, se $F \notin \mathcal{S} \Rightarrow |F| > r(F)$

$\Rightarrow$ **per** $X = F$ **abbiamo** $|\, F \cap X \,| = |F| > r(F) = r(X)$

$\Rightarrow \exists\ X \subseteq \Gamma : |\, F \cap X \,| > r(X)$

■

Formulazione Rango

$$\text{(MIS)} \quad \max \{ c(F) : F \text{ è un } \textit{indipendente} \text{ di } \mathcal{S} \}$$

Problema di ***Ottimizzazione Combinatoria*** con *funzione obiettivo lineare*

$$S = \{ x : \text{vettore di incidenza di } F \in \mathcal{S} \}$$

Abbiamo dimostrato che:

$$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow | F \cap A | \leq r(A) \quad \forall\ A \subseteq \Gamma$$

$| F \cap A | =$ *prodotto interno* *dei vettori di incidenza di* **F** *ed* **A**

$$x^F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad | F \cap A | = (x^F)^T (x^A) = \sum_{e \in \Gamma} x_e^F x_e^A = \sum_{e \in A} x_e^F$$

$$x \in S \Leftrightarrow \sum_{e \in A} x_e \leq r(A) \quad \forall\ A \subseteq \Gamma$$

Formulazione Rango

(MIS) max { c(F): F è un indipendente di $\mathcal{S}$ }

Problema di ***Ottimizzazione Combinatoria*** con *funzione obiettivo lineare*

S = { x: vettore di incidenza di $F \in \mathcal{S}$ }

FORMULAZIONE:

$$P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \le r(A), & \forall A \subseteq \Gamma \\ x_e \ge 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

(MIS)

$$\max c^T x$$

$$x \in P_R \cap \{0,1\}^{|\Gamma|}$$

P_R rilassamento formulazione ottima

Formulazione Circuiti

$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{ C \not\subset F : C$ Circuito di $\mathcal{S} \}$

C Circuito di $\mathcal{S} \Rightarrow r(C)=|C|-1$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1, & C \text{ circuito} \\ x_e \geq 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

$$P_C \supset P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \leq r(A), & \forall A \subseteq \Gamma \\ x_e \geq 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

TEOREMA I2: $F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x^F \in P_C$ (P_C è una FORMULAZIONE)

DIMOSTRAZIONE:

$F \in \mathcal{S} \Rightarrow x^F \in P_R \Rightarrow x^F \in P_C$

Se viceversa $F \notin \mathcal{S} \Rightarrow$ esiste un circuito $C \subseteq F \Rightarrow$

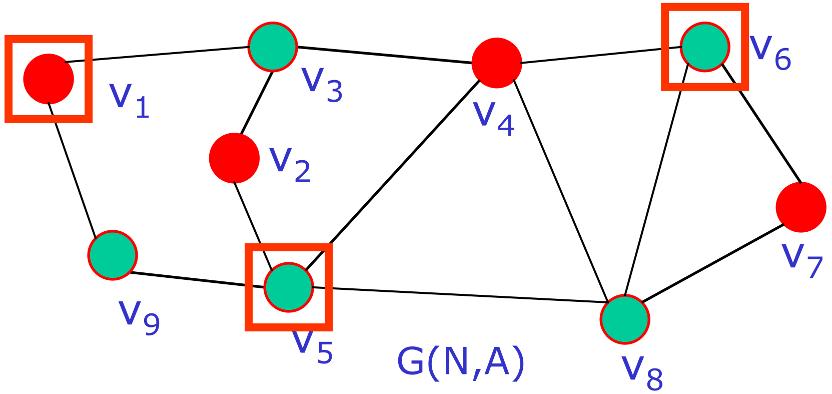
$\Rightarrow x_e^F = 1 \ \forall e \in C \Rightarrow \sum_{e \in C} x_e^F = |C| \Rightarrow x^F \notin P_C$

P_C rilassamento formulazione ottima

Formulazione Circuiti (Insieme stabile)

$\mathcal{S}$ = {*insiemi stabili di un grafo* $G(V,E)$}

Insiemi di **nodi** a coppie ***non adiacenti***



***Elementi* = nodi**

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots\}$

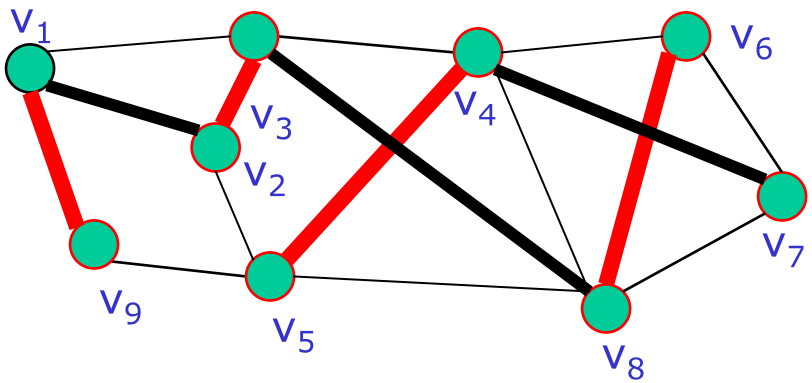
Circuiti $= v_i v_h \in E$

$$P_C = \begin{cases} x_u + x_v \leq 1, & uv \in E \\ x_u \geq 0, & u \in V \end{cases}$$

Formulazione circuiti ("matching")

$\mathcal{S}$ = {"**matching" di un grafo** $G(V,E)$}

Insiemi di **archi** a coppie ***non incidenti nello stesso nodo***



Elementi = archi

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{v_1v_2\}, \{v_3v_8\}, \{v_1v_2, v_3v_8\}, \ldots\}$$

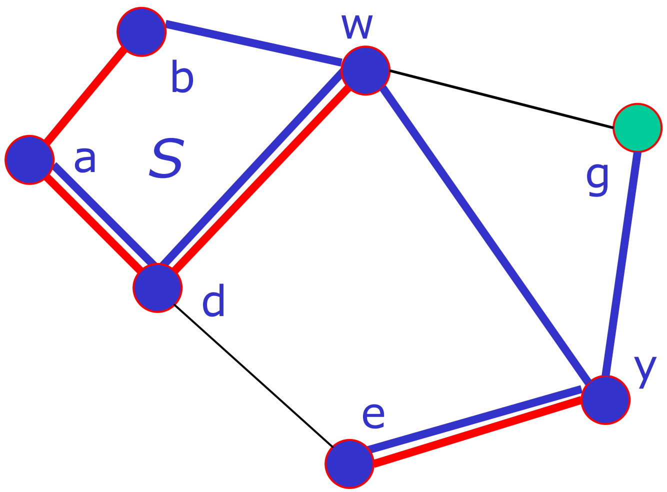
Circuiti = $\{e,f\}$ ***con e, f incidenti nello stesso nodo***

$$P_C = \begin{cases} x_e + x_f \le 1, & e,f \in \delta(v) \quad v \in V \\ x_f \ge 0, & f \in E \end{cases}$$

Formulazione ottima se e solo se il grafo è bipartito

Formulazione Circuiti (Foreste)

$\mathcal{S}$ = {**insiemi di foreste di un grafo** $G(V,E)$}



Elementi = archi

Circuito = ciclo

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \le |C| - 1, & C \text{ ciclo} \\ x_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

Formulazione ottima!

Formulazione "Cover" ("Knapsack")

$\mathcal{S}$ = { insiemi di progetti "compatibili" con un "budget"}

$$3x_1+2x_2+x_3+\boxed{2}x_4 \leq \boxed{5}$$

Elementi = progetti

"risorse" per il progetto

"budget"

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\} \ldots \}$

Indipendenti = soluzioni di "knapsack" a coefficienti positivi

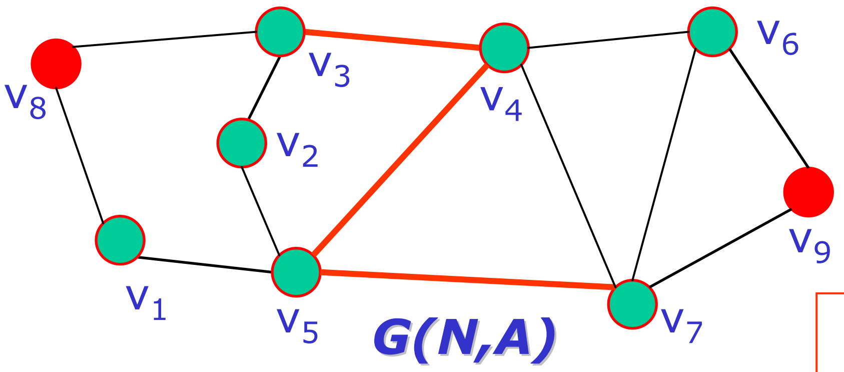
Circuito ("Cover") = un insieme di progetti non "compatibile" ma tale che ogni sottoinsieme è "compatibile"

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1, & C \text{ "cover"} \\ x_e \geq 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

Formulazione tagli ("grafo co-connesso")

Grafo connesso $G(N,A)$

$\mathcal{S}$ = { insiemi di archi la cui rimozione <u>non disconnette</u> il grafo $G(N,A)$ }



Elementi = archi

$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{sv_1\}, \{sv_1, v_2v_3\}, \dots\}$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \bar{T})$ connesso

Circuiti = Tagli minimali

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \leq |K| - 1, & K \text{ taglio} \\ x_e \geq 0, & e \in E \end{cases}$$

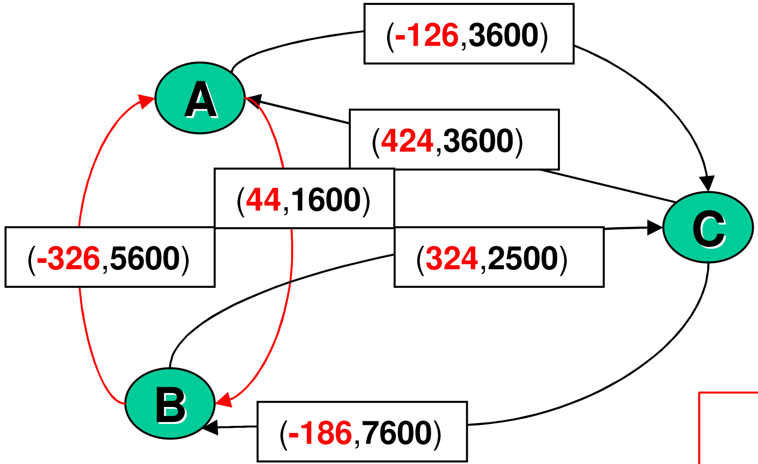
Formulazione Circuiti: "grafo senza cicli negativi"

Grafo connesso G(N,A)

c_e costo di un arco $e \in A$

$\mathcal{S}$ = { insiemi di archi che **non** contengono cicli a **costo totale negativo** }

$$\sum_{e \in C} c_e < 0$$



Elementi = archi

Circuito = ciclo (orientato) a costo totale negativo

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \le |C| - 1, & C \text{ ciclo negativo} \\ x_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

Formulazione circuiti

Nel grafo dell'esempio

$$\begin{cases} x_{AB} + x_{BA} \le 1 \\ x_{BA} + x_{AC} + x_{CB} \le 2 \\ \dots\dots \end{cases}$$

Formulazione circuiti - complessità

Quanti vincoli nelle formulazioni circuiti?

$$P_C = \begin{cases} x_u + x_v \leq 1, & uv \in E \\ x_u \geq 0, & u \in V \end{cases}$$

Insieme stabile: $|V|^2$

$$P_C = \begin{cases} x_e + x_f \leq 1, & e,f \in \delta(v) \quad v \in V \\ x_f \geq 0, & f \in E \end{cases}$$

"matching": $|E|^2$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1, & C \text{ ciclo} \\ x_e \geq 0, & e \in E \end{cases}$$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1, & C \text{ "cover"} \\ x_e \geq 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \leq |K| - 1, & K \text{ taglio} \\ x_e \geq 0, & e \in E \end{cases}$$

Cicli, "Cover" e Tagli
possono essere in numero esponenziale!

Un grafo planare con n nodi può contenere 2.27^n cicli $\quad n=100 \Rightarrow 10^{34}$ cicli!!

Non possiamo neanche "scrivere" il rilassamento lineare!

Abbiamo bisogno di potenziare il Metodo del Simplesso (per la PL)

→ Metodo del Simplesso Dinamico