Ottimizzazione Combinatoria

Introduzione

ANTONIO SASSANO

Università di Roma“La Sapienza”
Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Roma, 2010

Problema di Decisione – Soluzioni

S = *insiemedelle possibili alternative in un* ***problema di decisione***

ESEMPI:

Scelta del modo di trasporto:

S = *{Nave + Treno, Camion, Aereo+Treno}*

Scelta del periodo di produzione:

S = *{Gennaio, Febbraio+Marzo, Marzo+Aprile, Luglio+Agosto}*

Scelta del cammino di costo minimo da s a t:

S = *{Cammini da s a t}*

Problema di Decisione – Funzione Obiettivo

S = *insieme delle possibili alternative in un* ***problema di decisione***

$f(x) : S \rightarrow \mathbf{R}$ = *funzione obiettivo*

ESEMPIO

Scelta del modo di trasporto:

$S = \{Nave + Treno,\ Camion,\ Aereo + Treno\}$

$f(Nave+Treno) = 150.000$
$f(Camion) = 121.000$
$f(Aereo+Treno) = 180.000$

Problema di Decisione – Modello di Ottimizzazione

Problema di Decisione: $\min \{ f(x) : x \in S \}$

< TROVA LA SOLUZIONE DI **COSTO MINIMO** >

Soluzione ottima $x^*: f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in S$

$$f(x^*) = \min \{ f(x) : x \in S \}$$

$$x^* = \operatorname{argmin} \{ f(x) : x \in S \}$$

ESEMPIO: Scelta del ***modo di trasporto***:

$S = \{Nave + Treno,\ Camion,\ Aereo + Treno\}$

$f(Nave+Treno) = 150.000$

$f(Camion) = 121.000$

$f(Aereo+Treno) = 180.000$

$f(x^*) = 121.000; \quad x^* = Camion$

Ottimizzazione Combinatoria

Problema di Decisione: $min \{ f(x) : x \in S \}$

CON $1 < |S| < \infty$

L'insieme delle soluzioni ammissibili ***ha cardinalità finita***

L'**ottimo** x^* esiste sempre e puo' essere individuato con una ***enumerazione completa*** di S

$1 < |S| < \infty$

Si tratta di una *ipotesi restrittiva*?

Risposta teorica e … provocatoria

Le componenti di ogni soluzione di un problema di decisione possono assumere un insieme finito di valori (precisione finita) e dunque abbiamo sempre un insieme finito di soluzioni.

Ottimizzazione Combinatoria - Esempi

In verità … migliaia di **problemi reali** possono essere formulati come problemi di Ottimizzazione Combinatoria …
… dalla ***biologia molecolare***

Algorithms for SNP Data Collection and Analysis

Ion Mandoiu
Computer Science & Engineering Department
University of Connecticut
http://www.engr.uconn.edu/~ion/

Ottimizzazione Combinatoria - Esempi

… al progetto di reti digitali terrestri

… dalla ***aste combinatorie***

Combinatorial Auctions

By: Shai Roitman
e-mail: shairoi@cs.huji.ac.il

A migliaia di altri problemi …..

Algorithms

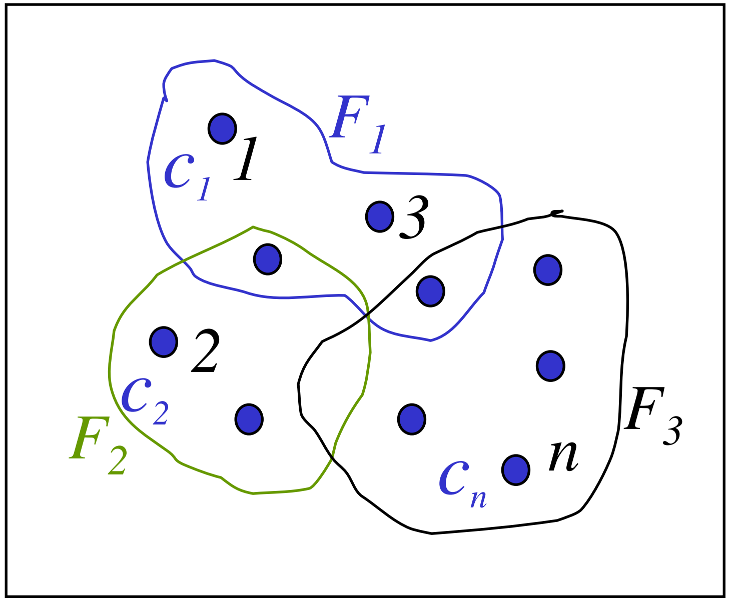
- What is an algorithm? Algorithms are what make it possible for computers to resolve problems. Algorithms are at the very heart of computer science.
- An informal definition (from WikiPedia):

"An **algorithm** is a procedure (a finite set of well-defined instructions) for accomplishing some task which, given an initial state, will terminate in a defined end-state"

Problemi di OC con funzione obiettivo lineare

- Insieme base $\Gamma=\{1,2,\ldots,n\}$ *(eventi elementari)*
  (*es.* progetto *i* attivato, nodo *i* scelto, connessione *i* stabilita)
- *Costi (Vantaggi) elementari* $\{c_i$ associati agli elementi di $\Gamma\}$
- *Soluzione Ammissibile* = Opportuno sottoinsieme $F_1 \subseteq \Gamma$
  (*es.* sottoinsieme di progetti attivati che soddisfano il "budget")
- *Costo di una soluzione* F_1 = *somma dei costi elementari* degli elementi di F_1

$$\boxed{c(F_1) = \sum_{i \in F_1} c_i}$$



- **Insieme delle soluzioni ammissibili**

$$\mathcal{S} = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$$

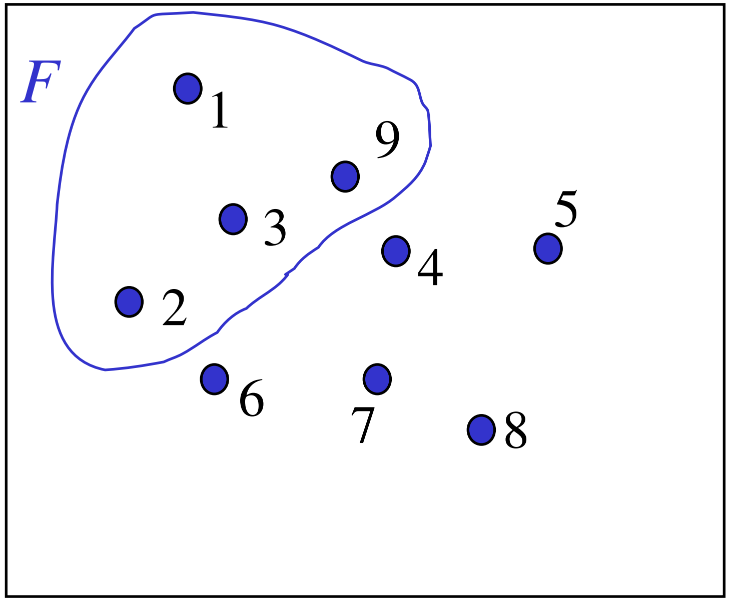
Problema:

$$\boxed{\min \{c(F):\ F \in \mathcal{S}\}}$$

Problemi di PL01

- Insieme base $\Gamma=\{1,2,\ldots,n\}$ *(eventi elementari)*
- Soluzione ammissibile $F=\{1,2,3,9\}\in \mathcal{S}$
- Se rappresentiamo F con il suo vettore di incidenza x^F abbiamo:

$$x^F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



E quindi:

S = {*vettori di incidenza degli insiemi* $F\in \mathcal{S}$} $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}$

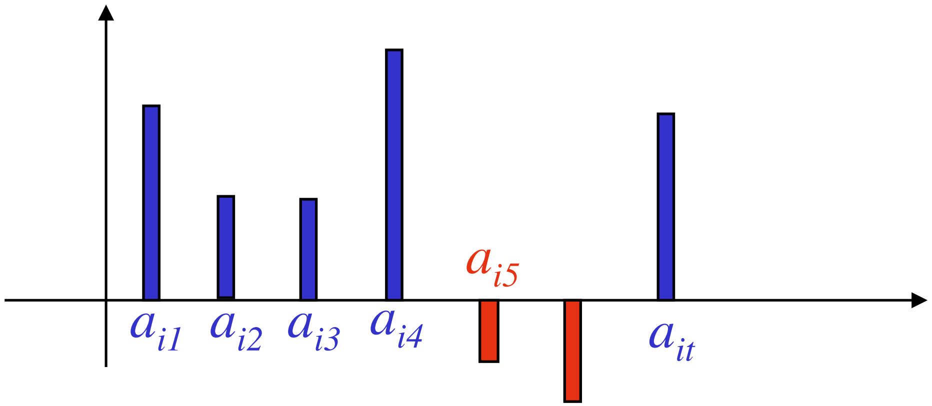
- PL01= Problemi di OC con funzione obiettivo lineare $f(x)=c^Tx$

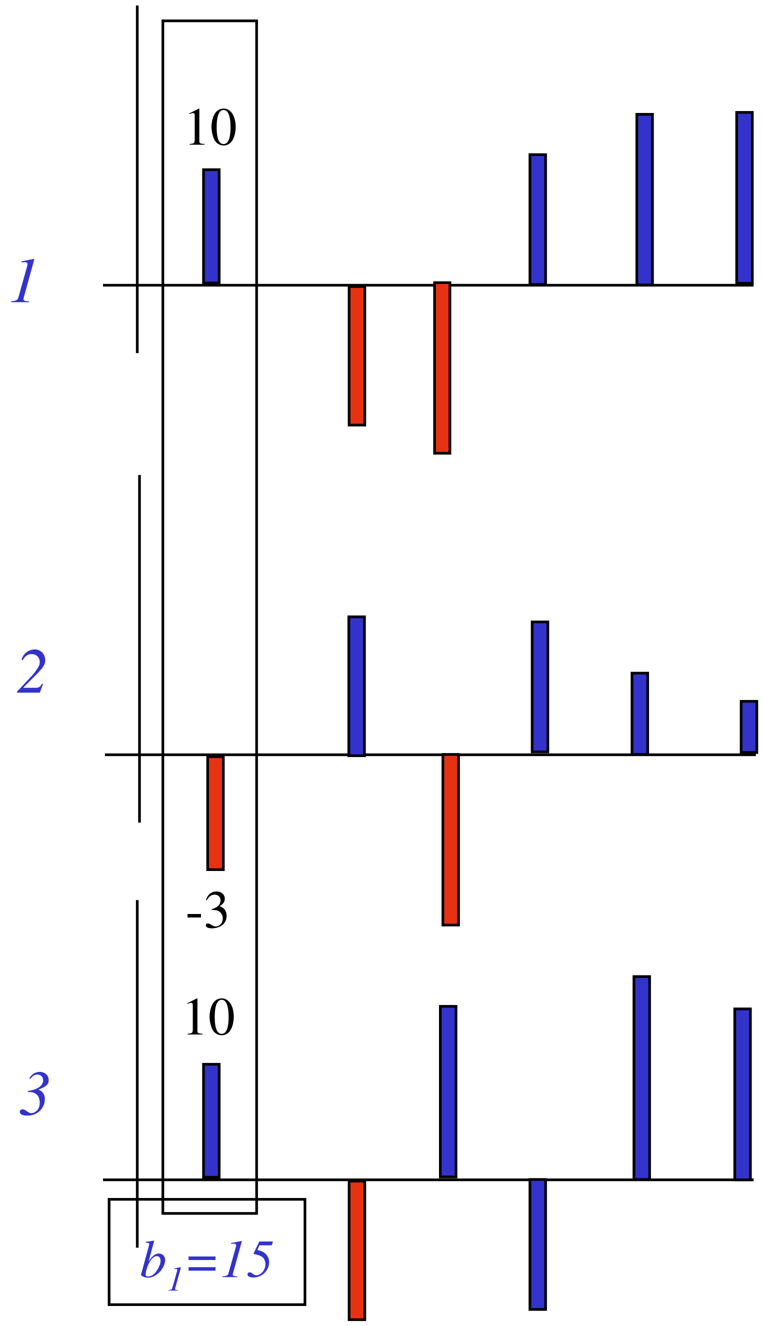
$\min \{c(F):\ F\in \mathcal{S}\}$ = $\min \{c^Tx:\ x\in S\subseteq \{0,1\}^n\}$

Esempio base: La pianificazione degli investimenti

DATI

- Insieme ***I* ={*1,2,...,n*}** di ***Investimenti***
- ***Indice di redditività*** (vantaggio) c_i dell'investimento i
- Redditività totale di un insieme di investimenti ***F*** $\sum_{i \in F} c_i$
- Orizzonte temporale $T=\{1,2,...,t\}$
- ***Vettore dei flussi di cassa*** $a_i=(a_{i1}, a_{i2},..., a_{it})$ dell'investimento i
- ***"Budget"*** b_j del periodo $j \in T$





$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1t})$$

$$(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2t})$$

$$(a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3t})$$

$$\le b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S$$

Pianificazione degli Investimenti

TROVARE

Insieme di investimenti F^* di <u>redditività totale massima</u> e tale che la somma dei flussi di cassa a_{ij} dei progetti attivati sia, in ogni periodo $j \in T$, inferiore al budget $\mathbf{b}_j$.

S = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in <u>ogni periodo</u>*}

Pianificazione degli Investimenti - Problema di OC lineare

$\boldsymbol{S}$ = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in <u>ogni periodo</u>*}

c_i | *Indice di redditività* del progetto *i*

- *Tasso interno di rendimento* (TIR) - (*Internal Rate of Return* (IRR))
- *Valore attuale netto* (VAN) - (*Net Present Value* (NPV))
- *Periodo (Punto) di "Breakeven"* - (*Payback* (PBK))

$$\max c^T x$$
$$x \in \boldsymbol{S}$$
$$x_i \leq x_j$$
$$x_i + x_j \leq 1$$
$$x_i = x_j$$

<u>Relazioni tra progetti (vincoli aggiuntivi)</u>:

- *i* può essere svolto *<u>solo se</u>* *j* viene svolto
- *solo uno tra i* e *j* deve essere svolto
  (*ad es. se i e j sono copie dello stesso progetto con stessi flussi di cassa e diversi periodi iniziali*):
- *i viene svolto se e solo se viene svolto j*