Ottimizzazione Combinatoria

Proprietà della Matrice di Incidenza

ANTONIO SASSANO

Università di Roma"La Sapienza"
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Corso di Laurea in "Ingegneria Gestionale"

Roma, Ottobre 2009

Matrice di Incidenza Nodi-Archi

- ***M*** *matrice $(n \times m)$ a componenti $(0,1,-1)$*

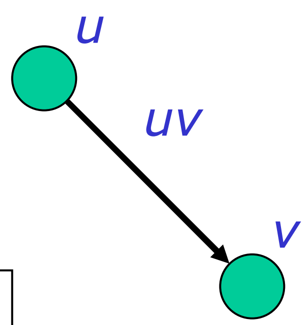
- *Associata ad un grafo orientato $G(N,A)$ con $|N|=n$ e $|A|=m$*

- *Ogni riga di **M** è associata ad un nodo*

- *Ogni colonna di **M** è associata ad un arco*

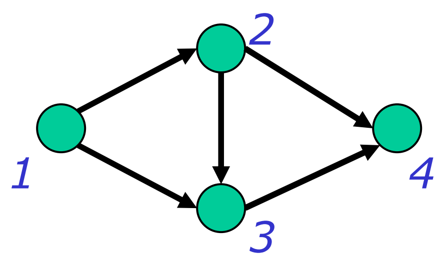
- *Una colonna associata ad un arco uv ha due componenti diverse da 0:*

  -1 in corrispondenza alla riga u (coda di uv)
  +1 in corrispondenza alla riga v (testa di uv)



	uv
	0
u	-1
	:
v	1
	0

ESEMPIO



	12	13	23	24	34
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1

M

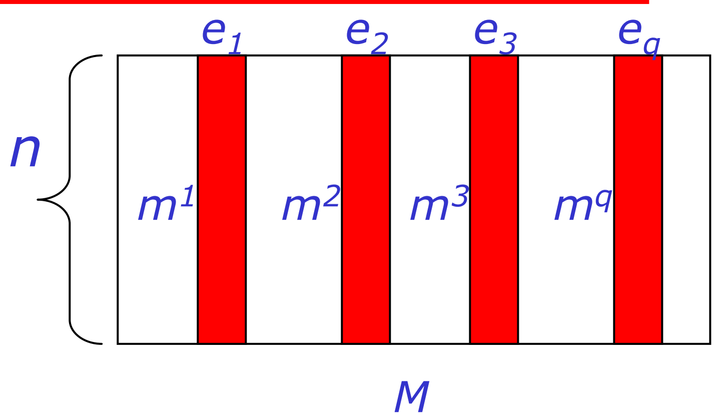
Proprietà della Matrice di Incidenza

TEOREMA 6.1: *Sia M la Matrice di Incidenza di un grafo $G(N,A)$ e sia $M_T=\{m^1,m^2,\dots,m^q\}$ l'insieme di colonne di M associate ad un generico insieme di archi $T=\{e_1,\dots,e_q\}$ di A. Abbiamo che l'insieme di colonne (vettori di $\Re^n$) M_T è LINEARMENTE INDIPENDENTE <u>se e solo se</u> T è una FORESTA di $G(N,A)$.*

DIMOSTRAZIONE:

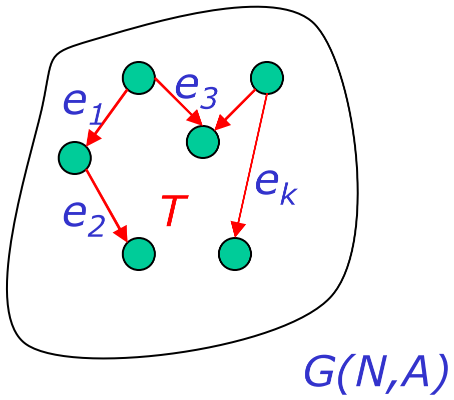
DIMOSTRIAMO PRIMA CHE:

$T=\{e_1,\dots,e_q\}$ è una FORESTA $\Rightarrow$
$M_T=\{m^1,\dots,m^q\}$ è LINEARMENTE INDIPENDENTE



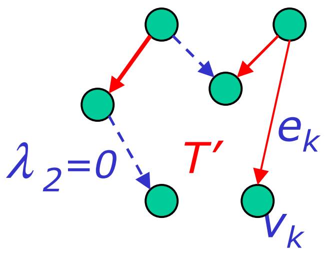
Supponiamo (per assurdo) che M_T <u>non sia</u> linearmente indipendente

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j m^j = 0_n \quad \text{con } \lambda_t \neq 0 \text{ per qualche } t \in \{1,\dots,q\}$$



sia $T'=\{\, e_t \in T:\ \lambda_t \neq 0 \,\}$

T' è una foresta con almeno un arco

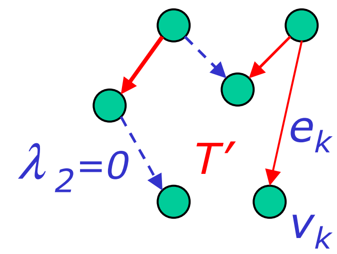


sia e_k un arco di T' che incide su una foglia v_k

[Dimostrare che esiste almeno una foglia in T']

Teorema 6.1 (...)

sia e_k un arco di T' che incide su una foglia v_k



Poiché (ipotesi)

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j m^j = 0_n \quad \text{con } \lambda_t \neq 0 \text{ per qualche } t \in \{1,\dots,q\}$$

e $T' = \{\, e_t \in T:\ \lambda_t \neq 0 \,\}$

Abbiamo che:

$$\sum_{e_t \in T'} \lambda_t m^t = 0_n \quad \text{con } \lambda_t \neq 0 \text{ per ogni } t$$

$$\lambda_1 \underset{m^1}{\begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \end{bmatrix}} + \lambda_2 \underset{m^2}{\begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \end{bmatrix}} \ldots + \lambda_k \underset{m^k}{\begin{bmatrix} \\ \\ \pm 1 \\ \end{bmatrix}} + \lambda_{|T'|} \underset{m^{|T'|}}{\begin{bmatrix} \\ \\ 0 \\ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v_k

Solo e_k entrante (o uscente) da v_k

Ma allora $\sum_{e_t \in T'} \lambda_t m^t = 0 \Rightarrow \pm \lambda_k = 0$

CONTRADDIZIONE

Teorema 6.1 (...)

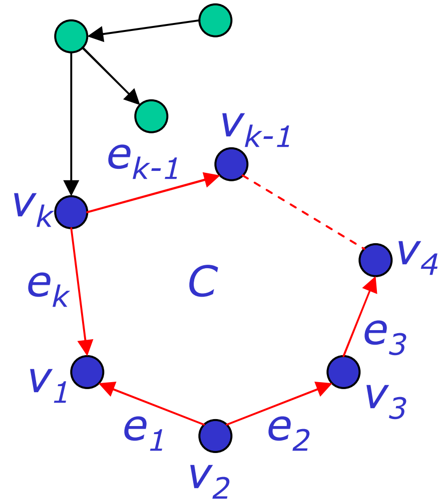
ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$T = \{e_1,\ldots,e_q\}$ è una FORESTA $\Rightarrow$
$M_T = \{m^1,\ldots,m^q\}$ è LINEARMENTE INDIPENDENTE

ORA DIMOSTREREMO CHE:

$M_T = \{m^1,\ldots,m^q\}$ è LINEARMENTE INDIPENDENTE
$\Rightarrow T = \{e_1,\ldots,e_q\}$ è una FORESTA

Detto S l'insieme degli estremi degli archi in T, supponiamo (per assurdo) che $H(S,T)$ non sia una foresta



$H(S,T)$ contiene un ciclo $C=\{v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,v_k,e_k,v_1\}$

e_i arco diretto se $e_i=(v_i,v_{i+1})$ [es. (v_2,v_3)]

e_i arco inverso se $e_i=(v_{i+1},v_i)$ [es. (v_2,v_1)]

e_i arco diretto $\quad m^i = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_{i+1} - u_i \Rightarrow$ poni $\lambda_i = -1 \Rightarrow \lambda_i m^i = u_i - u_{i+1}$

[vettori unitari]

e_i arco inverso $\quad m^i = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i \\ i+1 \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_i - u_{i+1} \Rightarrow$ poni $\lambda_i = 1 \Rightarrow \lambda_i m^i = u_i - u_{i+1}$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m^i = \sum_{i=1}^{k} u_i - u_{i+1} = (u_1 - u_2)+(u_2 - u_3)+\ldots+(u_k - u_1)=0_n$$

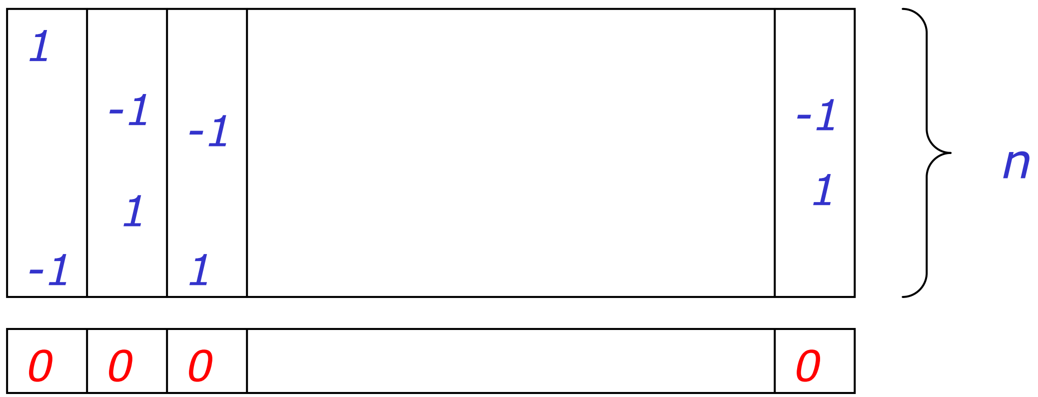
0_n combinazione delle colonne di **M** con coefficienti non tutti nulli $\Rightarrow$ **CONTRADDIZIONE**

Rango della Matrice di Incidenza

TEOREMA 6.2: *Il rango della Matrice di Incidenza M di un grafo $G(N,A)$ orientato e connesso è pari a $n-1$.*

DIMOSTRAZIONE:

Ogni colonna m^e di M [$e=(u,v)$] ha due soli elementi diversi da zero: -1 nella riga corrispondente ad u e $+1$ in quella corrispondente a v



La somma di tutte le righe di M è il vettore nullo ⇒ *rango(M) $\leq n-1$*

$G(N,A)$ connesso ⇒ *esiste un albero ricoprente T*

⇒ *L'insieme delle colonne di M corrispondenti agli archi di T (M_T) è <u>linearmente indipendente</u>* *[per il teorema 6.1]* ⇒ *rango(M) $\geq n-1$*

Sottomatrici non-Singolari e Alberi Ricoprenti

TEOREMA 6.3: *Una sottomatrice quadrata **B** $(n-1 \times n-1)$ della Matrice di Incidenza **M** di un grafo orientato e connesso $G(N,A)$ è non-singolare se e solo se le sue colonne corrispondono all'insieme degli archi T_B di un albero ricoprente di $G(N,A)$.*

DIMOSTRAZIONE:

B** sottomatrice $(n-1 \times n-1)$ quadrata non-singolare di **M

*$\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Le colonne di **B** sono linearmente indipendenti*

[per il Teorema 6.1]

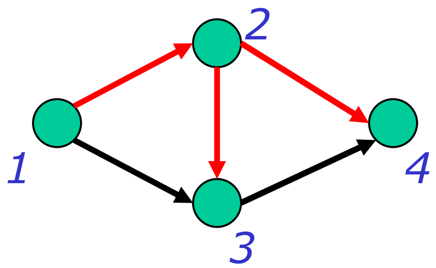
*Le colonne di **B** sono linearmente indipendenti*

*$\Leftrightarrow$ Gli archi associati alle colonne di **B** (T_B) definiscono una foresta del grafo $G(N,A)$*

T_B è una foresta con $|N|-1$ archi $\Leftrightarrow$ T_B albero ricoprente di $G(N,A)$

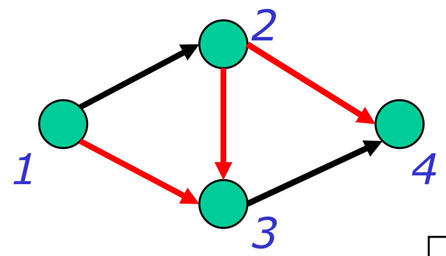
■

Sottomatrici quadrate e sottografi (Esempi)



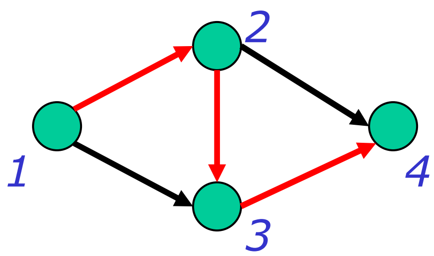
	12	13	23	24	34
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1

M



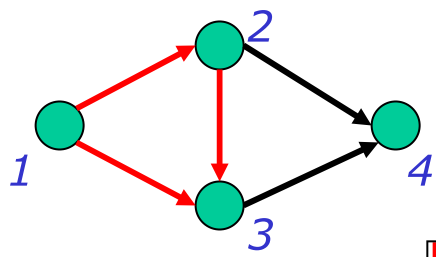
	12	13	23	24	34
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1

M



	12	13	23	24	34
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1

M



SINGOLARE !

	12	13	23	24	34
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1

M