Ottimizzazione Combinatoria

Totale Unimodularità

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Roma “La Sapienza”

A.A. 2010

Come dimostrare che una formulazione è ottima?

Problema di PL01: $\boxed{z^* = \min \{c^T x : x \in S\}}$

$\boxed{P = \{x \in R^n : Dx \leq d\}}$ formulazione di S

$\boxed{P = P_S = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = Conv(S)\ ?}$

Si può dimostrare che :

- Ogni disequazione del sistema $Ax \leq b$ è **implicata** dal sistema $Dx \leq d$;

$$
(1/2)\quad
\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & \leq & 2 \\
2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 & \leq & 2 \\
\hline
4x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 & \leq & 3
\end{array}
$$

- *Oppure che* $\operatorname{argmin} \{c^T x : x \in P\} \in S$ **per ogni** $c \in R^n$

- *Oppure che* ogni ***vertice*** di P ha **componenti 0-1**

Iniziamo da quest'ultimo caso….

Totale Unimodularità

Definizione 1: *Una matrice* $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ *di è detta* ***unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata* $\mathbf{B}$ $(m \times m)$ *di* $\mathbf{A}$ ***(base)*** *si ha* $\det(B) \in \{0,1,-1\}$

Definizione 2: *Una matrice* $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ *di è detta* ***totalmente unimodulare*** *se e solo se, per ogni sotto-matrice quadrata di* $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ $(p \times p)$ *con* $p>0$ *si ha* $\det(B) \in \{0,1,-1\}$

3	2
1	1

unimodulare *ma non* ***totalmente unimodulare***

1	1	0
0	1	1
1	0	1

Non ***unimodulare***

0	1	1
1	0	1

unimodulare *e* ***totalmente unimodulare***

Unimodularità e vertici interi (I)

TEOREMA 1: *Sia* A *una matrice a componenti intere con* **rank(A)=m**. *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. A è **unimodulare;**
2. *I* **vertici** *di* $P = \{x \in R^n : Ax=b\ ,\ x \geq 0_n\}$ *sono* **interi** *per ogni vettore* $b \in Z^m$ *(intero)*
3. *Ogni sotto-matrice quadrata* B $(m \times m)$ **non-singolare** *di* A *ha una* **matrice inversa** B^{-1} **a componenti intere**

DIMOSTRAZIONE:

L'equivalenza si dimostra provando che:

$(1 \Rightarrow 2)$ $(2 \Rightarrow 3)$ $(3 \Rightarrow 1)$

Unimodularità e vertici interi $(1 \Rightarrow 2)$

A è **unimodulare** $\Rightarrow$ **Vertici** di P **interi** per $b \in Z^m$

DIMOSTRAZIONE: $x°$ **vertice** di $P = \{x \in R^n : Ax = b\ ,\ x \geq 0_n\}$

$\Leftrightarrow$ $x°$ **SBA (Soluzione di Base Ammissibile)**

$\Leftrightarrow$ Esiste B sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

tale che, posto: $x = \begin{pmatrix} x_B \in R^m \\ x_N \in R^{n-m} \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$ abbiamo:

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \qquad \boxed{x° = \begin{pmatrix} x^o_B \\ x^o_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \geq 0_n}$$

$$B^{-1} = \frac{B^+}{\det(B)}$$ **con** B^+ *matrice aggiunta* di B

A **matrice** *intera (a componenti intere)* $\Rightarrow$ B^+ *intera*

A **matrice** *unimodulare* $\Rightarrow$ $|\det(B)| = 1$

$\Rightarrow$ $B^{-1}b \in Z^m$ **per ogni** $b \in Z^m$ $\Rightarrow$ $x° \in Z^n$ **per ogni** $b \in Z^m$

Vertici interi e interezza di B^{-1} ($2 \Rightarrow 3$)

Vertici di P **interi** per $b \in Z^m \Rightarrow$ B non-singolare ha B^{-1} **intera**

DIMOSTRAZIONE:

- Sia B una sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

con $B^{-1} = [\pi_1 \mid \pi_2 \mid \pi_3 \mid \cdots \mid \pi_m]$ (π_k colonna di B^{-1})

Dimostriamo che una generica colonna π_k è **intera**:

- Sia t un **vettore intero** tale che $t+\pi_k \geq 0_m$

- Sia $b(t) = Bt+u_k$ (u_k k-esimo **vettore unitario**)

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b(t) \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(Bt+u_k) \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+B^{-1}u_k \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\pi_k \\ 0_{n-m} \end{pmatrix} \geq 0_n$$

$\Rightarrow$ **SBA** del sistema $Ax=b(t)$, $x \geq 0_n$

[per ipotesi]

$\Rightarrow$ **Vertice** di $P = \{x \in R^n : Ax=b(t),\ x \geq 0_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $t+\pi_k$ un **vettore intero** $\Rightarrow$ π_k un **vettore intero**

[t è un vettore intero]

Interezza di B^{-1} e unimodularità ($3 \Rightarrow 1$)

B non-singolare ha B^{-1} intera $\Rightarrow$ A è unimodulare

DIMOSTRAZIONE:

- Sia B una sotto-matrice $(m \times m)$ di A con $\det(B) \neq 0$

$\Rightarrow$ B^{-1} ha tutte **componenti intere**

$\Rightarrow$ $|\det(B)|$ e $|\det(B^{-1})|$ **numeri interi**

ma $|\det(B)|\,|\det(B^{-1})| = |\det(BB^{-1})| = 1$

$\Rightarrow$ $|\det(B)| = |\det(B^{-1})| = 1$

$\Rightarrow$ A è **unimodulare**

$\blacksquare$

Vertici, forma Standard e forma Generale

TEOREMA 2: *Il vettore $x°$ è un vertice del poliedro:*

$$P = \{x \in R^n : Ax \le b\ ,\ x \ge 0_n\}$$

se e solo se *il vettore:* $\begin{pmatrix} x° \in R^n \\ s° \in R^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x° \\ b - Ax° \end{pmatrix}$

è un **vertice** *del poliedro*

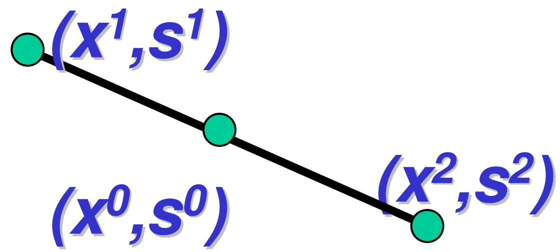
$$Q = \{(x,s) \in R^{n+m} : Ax + Is = b\ ,\ x \ge 0_n\ ,\ s \ge 0_m\}$$

DIMOSTRAZIONE: ($x°$ è un vertice di $P \Rightarrow (x°,s°)$ è un vertice di Q)

- Supponi che $(x°,s°)$ **non sia un vertice** di Q

$\Rightarrow$ **esistono due vettori** $(x^1,s^1) \neq (x^2,s^2)$ **tali che:**

$(x°,s°) = \alpha\,(x^1,s^1) + (1-\alpha)\,(x^2,s^2)\quad 1 > \alpha > 0$



$\Rightarrow\ x° = \alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2 \quad 1 > \alpha > 0$

$\Rightarrow\ x^1 = x^2$ [$x°$ è un vertice di P]

$\Rightarrow\ s^1 = b - Ax^1 = b - Ax^2 = s^2$ **CONTRADDIZIONE**

Vertici, forma Standard e forma Generale

DIMOSTRAZIONE: ($(x°,s°)$ è un vertice di $Q \Rightarrow x°$ è un vertice di P)

-Supponi che $x°$ non sia un vertice di P

$\Rightarrow$ esistono due vettori $x^1 \neq x^2$ tali che:

$$\boxed{x° = \alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2 \quad \alpha > 0}$$

$\Rightarrow$ $s^1 = b - Ax^1 \neq b - Ax^2 = s^2$

$$\boxed{s° = \alpha\, s^1 + (1-\alpha)\, s^2}$$

$\Rightarrow (x°,s°) = \alpha\,(x^1,s^1) + (1-\alpha)\,(x^2,s^2) \quad \alpha > 0$

con $(x^1,s^1) \neq (x^2,s^2)$ CONTRADDIZIONE

Totale Unimodularità e vertici interi

TEOREMA: *Sia* A *una matrice a componenti intere con* $\mathrm{rank}(A)=m$. *Allora I* ***vertici*** *di* $P = \{x\in R^n : Ax \le b \,,\, x \ge 0_n\}$ *sono* ***interi*** *per ogni vettore* $b \in Z^m$ ***(intero)*** *se e solo se la* ***matrice*** A *è* ***totalmente unimodulare.***

DIMOSTRAZIONE: [Teorema 2] $x° \in R^n$ *è un vertice del poliedro:*

$$P = \{x\in R^n : Ax \le b \,,\, x \ge 0_n\}$$

se e solo se *il vettore:* $\begin{pmatrix} x° \in R^n \\ s° \in R^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x° \\ b - Ax° \end{pmatrix}$

è un ***vertice*** *del poliedro:*

$$Q = \{(x,s)\in R^{n+m} : Ax+Is=b \,,\, x \ge 0_n \,,\, s \ge 0_m\}$$

I vertici di Q *hanno componenti intere* ***se e solo*** *se la matrice* $(A\ I_m)$ *è* ***unimodulare*** [Teorema 1]

Totale Unimodularità e vertici interi (II)

Dobbiamo dimostrare che:

$(A\ I_m)$ unimodulare $\Leftrightarrow$ A totalmente unimodulare

$$[A \quad I_m] = [a^1 \mid \cdots \mid a^n \mid u^1 \mid \cdots \mid u^m]$$

[solo se] A totalmente unimodulare $\Rightarrow$ $(A\ I_m)$ unimodulare

Sia B una sotto-matrice $(m \times m)$ di $(A\ I_m)$ con $\det(B) \neq 0$

$$B = [\underbrace{a^{j_1} \mid \cdots \mid a^{j_r}}\ \mid \underbrace{u^{j_r+1} \mid \cdots \mid u^{j_m}}]$$

$$B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline F_1 & I_{m-r} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} j_1 \\ \vdots \\ j_r \\ j_{r+1} \\ \vdots \\ j_m \end{array}$$

$\Rightarrow$ $|\det(B)| = |\det(F)| = 1$

Totale Unimodularità e vertici interi (III)

[se] $(A\ I_m)$ **unimodulare** $\Rightarrow$ A **totalmente unimodulare**

Sia F *una sotto-matrice* $(p \times p)$ *di* A *con* $p>0$ *e* $\det(B)\neq 0$

Siano $\{ j_1,\ldots, j_p \}$ *gli indici delle colonne di* F

Definisci la seguente base B $(m \times m)$ *di* (A, I_m)

$$B = \left[\underline{a^{j_1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a^{j_p}} \;\middle|\; \underline{u^{j_{p+1}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, u^{j_m}} \right]$$

$$\begin{array}{cc} B = \left[\begin{array}{c|c} F & 0 \\ \hline F_1 & I_{m-p} \end{array}\right] & \begin{array}{c} j_1 \\ \vdots \\ j_p \\ j_{p+1} \\ \vdots \\ j_m \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow |\det(F)| = |\det(B)| = 1$

Come verificare la Totale Unimodularità

TEOREMA: *Sia* ***A*** *una matrice a componenti* ***{0,1,-1}****. Allora* ***A*** è **totalmente unimodulare (TUM)** **se:**

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di* ***A*** *sono partizionabili in due insiemi* Q_1 *e* Q_2

<u>tali che:</u>

(2a) Se una colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ aventi lo **stesso segno** <u>allora</u> $i \in Q_1$ e $h \in Q_2$;

(2b) Se una colonna j contiene due elementi $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ aventi lo **segno diverso** <u>allora</u> $i,h \in Q_1$ *oppure* $i,h \in Q_2$;

DIMOSTRAZIONE: (provate a dimostrarlo … difficile)

- Si tratta di una condizione sufficiente (criterio)
- Per le matrici per le quali vale la ***(1)*** $\Rightarrow$ ***<u>la (2) è necessaria</u>***

Criterio Sufficiente (esempi)

TEOREMA: *Sia* A *una matrice a componenti* $\{0,1,-1\}$.

Allora A *è* ***totalmente unimodulare (TUM) se:***

(1) *ogni colonna contiene al più due coefficienti diversi da zero;*

(2) *le righe di* A *sono partizionabili in due insiemi* Q_1 *e* Q_2

tali che:

(2a) Se una colonna j *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***stesso segno*** *allora* $i \in Q_1$ *e* $h \in Q_2$;

(2b) Se una colonna j *contiene due elementi* $a_{ij} \neq 0$ **e** $a_{hj} \neq 0$ *aventi lo* ***segno diverso*** *allora* $i,h \in Q_1$ *oppure* $i,h \in Q_2$;

$$\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ \\ \\ Q_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Criterio OK $\Rightarrow$ TUM

Criterio fallito

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Non TUM

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TUM

Matrici Totalmente Unimodulari

1. *Se* $\boldsymbol{A}$ *è* ***totalmente unimodulare***

$$A^T \qquad \begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{bmatrix}$$

sono ***totalmente unimodulari***

2. *La* ***matrice di incidenza*** $\boldsymbol{M}$ *di un grafo orientato è* ***totalmente unimodulare***

DIMOSTRAZIONI: (a cura dello studente)