Ottimizzazione Combinatoria 2

formulazione "Cover" del Knapsack

SARA MATTIA

Università di Roma"La Sapienza"
Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Oracolo di Separazione (da max a min)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{\max_{u}} \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1)\, u_i - \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i$$

$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$f(u^*) \leq -1$ ⇒ non esiste nessun cover violato

$f(u^*) > -1$ ⇒ u^* vettore di incidenza di un cover violato

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{\min_{u}} \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i - \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1)\, u_i$$

$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^*) = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*)$$

$g(u^*) \geq 1$ ⇒ non esiste nessun cover violato

$g(u^*) < 1$ ⇒ u^* vettore di incidenza di un cover violato

Oracolo «knapsack» approssimato

$$\cancel{g(u^*)} = \min_{u} \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i \quad - \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1)\, u_i$$

$g(u^0)$

$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$

$$\cancel{u \in \{0,1\}^n} \quad 1_n \geq u \geq 0_n$$

- $\boldsymbol{u^*}$ soluzione ottima del problema (0,1)
- $\boldsymbol{u^0}$ soluzione ottima del rilassamento [$\boldsymbol{z_{LP} = z(u^0)}$]
- $\boldsymbol{u^+}$ *arrotondamento all'intero superiore della soluzione ottima* $\boldsymbol{u^0}$ *del rilassamento*

$\boldsymbol{g(u^0) \geq 1}$ ⇒ non esiste **nessun cover violato**

$\boldsymbol{g(u^+) < 1}$ ⇒ $\boldsymbol{u^+}$ **vettore di incidenza di un cover violato**

Come risolverlo? Simplesso?

No, più semplice ...

Oracolo «knapsack» approssimato

$$\min_u c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$$
$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n \geq b$$
$$0 \leq u_i \leq 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Rapporto costo/effetto:

$$\boxed{r_i = \frac{c_i}{a_i}, i = 1, \ldots, n}$$

$$\min_u \mathbf{2}u_1 + \mathbf{5}u_2 + \mathbf{5}u_3 + \mathbf{10}u_4 + u_5$$
$$\mathbf{3}u_1 + \mathbf{3}u_2 + \mathbf{2}u_3 + \mathbf{5}u_4 + \mathbf{3}u_5 \geq 8$$

$$r_1 = 2/3 = 0{,}66$$
$$r_2 = 5/3 = 1{,}66$$
$$r_3 = 5/2 = 2{,}5$$
$$r_4 = 10/5 = 2$$
$$r_5 = 1/3 = 0{,}33$$

Algoritmo Soluzione knapsack "*frazionario*"

1. Calcola Rapporto costo/effetto $r_i = c_i \,/\, a_i$, $i = 1, \ldots. n$

2. Costruisci **ordinamento** $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ per rapporti **costo/effetto** $r_i = c_i \,/\, a_i$, $i = 1, \ldots. N$ **non decrescenti**

$$\frac{c_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(1)}} \leq \frac{c_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}} \leq \cdots \leq \frac{c_{\sigma(n)}}{a_{\sigma(n)}}$$

3. Poni SOMMA := 0 ; $k = 1$

4. Finchè SOMMA + $a_{\sigma(k)} \leq b$ *do*

    4.1 $u_{\sigma(k)} := 1$

    4.2 SOMMA := SOMMA + $a_{\sigma(k)}$

    4.3 $k := k + 1$

5. Poni $u_{\sigma(k)} = (b - \text{SOMMA}) \,/\, a_{\sigma(k)}$

Esempio

$$\min\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 10x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \geq 8 \\ \cancel{x \in \{0,1\}^5} \end{cases}$$

- soluzione del rilassamento:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2/3 = 0{,}66 \\ r_2 &= 5/3 = 1{,}66 \\ r_3 &= 5/2 = 2{,}5 \\ r_4 &= 10/5 = 2 \\ r_5 &= 1/3 = 0{,}33 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \{\ 5, 1, 2, 4, 3\ \} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{x}_5 &= 1 \\ \hat{x}_1 &= 1 \\ \hat{x}_2 &= 1/3 = 0{,}33 \\ \hat{x}_4 &= 0 \\ \hat{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Esempio: Pianificazione Investimenti – 3 periodi

$$\max\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \le 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \le 6 \\ \cancel{x \in \{0,1\}^5} \quad 0 \le x_i \le 1 \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{x}_1 &= 0 \\ \hat{x}_2 &= 1 \\ \hat{x}_3 &= 0,8 \\ \hat{x}_4 &= 0,2 \\ \hat{x}_5 &= 1 \end{aligned}$$

Verifica primo vincolo $\Rightarrow$ $J_1^+ = \{1,4,5\}$, $J_1^- = \{2,3\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ y_2 &= 1 - x_2 \\ y_3 &= 1 - x_3 \\ z_4 &= x_4 \\ z_5 &= x_5 \end{aligned} \Rightarrow 2z_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2z_4 + 5z_5 \le 11$$

«knapsack» a coefficienti positivi

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato I

$$\boxed{2z_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2z_4 + 5z_5 \le 11}$$

$$\min_{u} \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j \quad - \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1)\, u_j$$

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \ge \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$$\hat{x}_1 = 0$$
$$\hat{x}_2 = 1$$
$$\hat{x}_3 = 0{,}8$$
$$\hat{x}_4 = 0{,}2$$
$$\hat{x}_5 = 1$$

$$J_1^+ = \{1,4,5\}$$
$$J_1^- = \{2,3\}$$

$$\min u_1 + u_2 + 0{,}8u_3 + 0{,}8u_4$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 2u_4 + 5u_5 \ge 12 \\ \cancel{u \in \{0,1\}^5} \qquad \mathbf{1_5} \ge \mathbf{u} \ge \mathbf{0_5} \end{cases}$$

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato II

$$g(u^0) = \min u_1 + u_2 + 0{,}8u_3 + 0{,}8u_4$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 2u_4 + 5u_5 \geq 12 \\ \cancel{u \in \{0,1\}^5} \quad \mathbf{1}_5 \geq u \geq \mathbf{0}_5 \end{cases}$$

$r_1 = 1/2 = 0{,}5$

$r_2 = 1/3 = 0{,}33$

$r_3 = 4/15 = 0{,}26$

$r_4 = 2/5 = 0{,}4$

$r_5 = 0$

$\Rightarrow \{\ 5,3,2,4,1\ \} \Rightarrow$

$u^0{}_5 = 1$

$u^0{}_3 = 1$

$u^0{}_2 = 1$

$u^0{}_4 = 1/2$

$u^0{}_1 = 0$

$g(u^0) = 1 + 0{,}8 + 0{,}4 > 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{nessun cover violato}}$

Esempio: Prova con il secondo vincolo

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \le 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \le 6 \\ \cancel{x \in \{0,1\}^5} \quad 0 \le x_i \le 1 \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\hat{x}_1 = 0$

$\hat{x}_2 = 1$

$\hat{x}_3 = 0{,}8$

$\hat{x}_4 = 0{,}2$

$\hat{x}_5 = 1$

Verifica secondo vincolo

$\Rightarrow$ $J_2^+ = \{1,2,4,5\}$

$J_2^- = \{3\}$

$\Rightarrow$

$z_1 = x_1$

$z_2 = x_2$

$y_3 = 1 - x_3$

$z_4 = x_4$

$z_5 = x_5$

$\Rightarrow$ $z_1 + 2z_2 + 2y_3 + 3z_4 + 3z_5 \le 6$

«knapsack» a coefficienti positivi

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato I

$$\boxed{z_1 + 2z_2 + 2y_3 + 3z_4 + 3z_5 \leq 6}$$

$$\min_{u} \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j \quad - \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1)\, u_j$$

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$$\hat{x}_1 = 0$$
$$\hat{x}_2 = 1$$
$$\hat{x}_3 = 0{,}8$$
$$\hat{x}_4 = 0{,}2$$
$$\hat{x}_5 = 1$$

$$J_2^+ = \{1,2,4,5\}$$
$$J_2^- = \{3\}$$

$$\min\ u_1 + 0{,}8u_3 + 0{,}8u_4$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3u_5 \geq 7 \\ \cancel{u \in \{0,1\}^5} \quad \boldsymbol{1_5 \geq u \geq 0_5} \end{cases}$$

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato II

$$\min u_1 + 0{,}8u_3 + 0{,}8u_4$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3u_5 \geq 7 \\ \cancel{u \in \{0,1\}^5} \quad 1_5 \geq u \geq 0_5 \end{cases}$$

$r_1 = 1$

$r_2 = 0$

$r_3 = 2/5 = 0{,}4$

$r_4 = 4/15 = 0{,}26$

$r_5 = 0$

$\Rightarrow \{\, 2,5,4,3,1 \,\}$

soluzione rilassamento

$$u^0 = \begin{array}{l} u^0{}_2 = 1 \\ u^0{}_5 = 1 \\ u^0{}_4 = 2/3 \\ u^0{}_3 = 0 \\ u^0{}_1 = 0 \end{array}$$

arrotondamento di u^0

$$u^+ = \begin{array}{l} u^+{}_2 = 1 \\ u^+{}_5 = 1 \\ u^+{}_4 = 1 \\ u^+{}_3 = 0 \\ u^+{}_1 = 0 \end{array}$$

$$g(u^0) = 0{,}8 * 2/3 < 1$$

Non possiamo concludere che tutti i «cover» sono soddisfatti, ma u^+, vettore di incidenza del cover $\{2,4,5\}$, soddisfa:

$$g(u^+) = 0{,}8 < 1 \Rightarrow z_2 + z_4 + z_5 \leq 2 \Rightarrow$$

Disequazione cover violata

Aggiungi il «cover» e risolvi nuovamente ....

Aggiungi il «cover» e risolvi nuovamente ....

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \le 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \le 6 \\ x_2 + x_4 + x_5 \le 2 \end{cases}$$

$$0 \le x_i \le 1 \quad i = 1, \dots, 5$$

Se il cover violato fosse stato $\{3, 4, 5\}$ avremmo avuto:

$$y_3 + z_4 + z_5 \le 2 \Rightarrow (1 - x_3) + x_4 + x_5 \le 2$$

$$\Rightarrow \boxed{-x_3 + x_4 + x_5 \le 1}$$