

Ottimizzazione Combinatoria 2

formulazione “Cover” del Knapsack


SARA MATTIA

*Università di Roma “La Sapienza”
Dipartimento di Informatica e Sistemistica*

Oracolo di Separazione (da **max** a **min**)

$$f(u^*) = \max_u \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1) u_i - \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i$$
$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$
$$u \in \{0,1\}^n$$

$f(u^*) \leq -1$  non esiste nessun cover violato


$f(u^*) > -1$  u^* vettore di incidenza di un cover violato

$$g(u^*) = \min_u \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i - \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1) u_i$$
$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$
$$u \in \{0,1\}^n$$

$$f(u^*) = -g(u^*)$$



$g(u^*) \geq 1$  non esiste nessun cover violato

$g(u^*) < 1$  u^* vettore di incidenza di un cover violato

Oracolo «knapsack» approssimato

$$\begin{aligned} \cancel{g(u^*)} &= \min_u \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i - \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1) u_i \\ g(u^0) & \sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1 \\ & \cancel{u \in \{0,1\}^n} \quad \cancel{1_n \geq u \geq 0_n} \end{aligned}$$

- u^* soluzione ottima del problema (0,1)
- u^0 soluzione ottima del rilassamento [$Z_{LP} = z(u^0)$]
- u^+ arrotondamento all'intero superiore
della soluzione ottima u^0 del rilassamento

$g(u^0) \geq 1$ \Rightarrow non esiste **nessun cover violato**

$g(u^+) < 1$ \Rightarrow u^+ **vettore di incidenza di un cover violato**

Come risolverlo? Simpleso?

No, più semplice ...

Oracolo «knapsack» approssimato

$$\min_u c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \geq b$$

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

Rapporto costo/effetto:

$$r_i = \frac{c_i}{a_i}, i = 1, \dots, n$$

$$\min_u 2u_1 + 5u_2 + 5u_3 + 10u_4 + u_5$$

$$3u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 5u_4 + 3u_5 \geq 8$$

$$r_1 = 2/3 = 0,66$$

$$r_2 = 5/3 = 1,66$$

$$r_3 = 5/2 = 2,5$$

$$r_4 = 10/5 = 2$$

$$r_5 = 1/3 = 0,33$$

Algoritmo Soluzione knapsack “frazionario”

1. Calcola Rapporto costo/effetto $r_i = c_i / a_i$, $i = 1, \dots, n$
2. Costruisci **ordinamento** $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ per rapporti **costo/effetto** $r_i = c_i / a_i$, $i = 1, \dots, N$ **non decrescenti**

$$\frac{c_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(1)}} \leq \frac{c_{\sigma(2)}}{a_{\sigma(2)}} \leq \dots \leq \frac{c_{\sigma(n)}}{a_{\sigma(n)}}$$

3. Poni **SOMMA** := 0 ; $k = 1$
4. Finchè **SOMMA** + $a_{\sigma(k)} \leq b$ *do*
 - 4.1 $u_{\sigma(k)} := 1$
 - 4.2 **SOMMA** := **SOMMA** + $a_{\sigma(k)}$
 - 4.3 $k := k + 1$
5. Poni $u_{\sigma(k)} = (b - \text{SOMMA}) / a_{\sigma(k)}$

Esempio

$$\min 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 10x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \geq 8 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \{0,1\}^5 \end{cases}$$

- soluzione del rilassamento:

$$r_1 = 2/3 = 0,66$$

$$r_2 = 5/3 = 1,66$$

$$r_3 = 5/2 = 2,5$$

$$r_4 = 10/5 = 2$$

$$r_5 = 1/3 = 0,33$$

⇒ { 5, 1, 2, 4, 3 } ⇒

$$\hat{x}_5 = 1$$

$$\hat{x}_1 = 1$$

$$\hat{x}_2 = 1/3 = 0,33$$

$$\hat{x}_4 = 0$$

$$\hat{x}_3 = 0$$

Esempio: Pianificazione Investimenti – 3 periodi

$$\begin{array}{l} \max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 6 \\ \cancel{x \in \{0,1\}^5} \end{array} \right. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \hat{x}_1 = 0 \\ \hat{x}_2 = 1 \\ \hat{x}_3 = 0,8 \\ \hat{x}_4 = 0,2 \\ \hat{x}_5 = 1 \end{array}$$

$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5$

Verifica primo vincolo \Rightarrow $J_1^+ = \{1,4,5\}$
 $J_1^- = \{2,3\}$

$$\begin{array}{l} z_1 = x_1 \\ y_2 = 1 - x_2 \\ \Rightarrow y_3 = 1 - x_3 \\ z_4 = x_4 \\ z_5 = x_5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2z_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2z_4 + 5z_5 \leq 11$$

«knapsack» a coefficienti positivi

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato I

$$2z_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2z_4 + 5z_5 \leq 11$$

$$\hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2 = 1$$

$$\hat{x}_3 = 0,8$$

$$\hat{x}_4 = 0,2$$

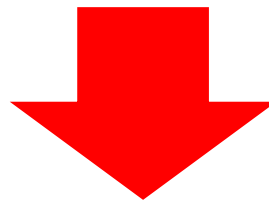
$$\hat{x}_5 = 1$$

$$J_1^+ = \{1,4,5\}$$

$$J_1^- = \{2,3\}$$

$$\min_u \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j - \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1) u_j$$
$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$



$$\min u_1 + u_2 + 0,8u_3 + 0,8u_4$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 2u_4 + 5u_5 \geq 12 \\ u \in \{0,1\}^5 \end{cases}$$

$$1_5 \geq u \geq 0_5$$

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato II

$$g(u^0) = \min u_1 + u_2 + 0,8u_3 + 0,8u_4$$
$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + 3u_3 + 2u_4 + 5u_5 \geq 12 \\ u \in \{0,1\}^5 \end{cases} \quad 1_5 \geq u \geq 0_5$$

$$r_1 = 1/2 = 0,5$$

$$r_2 = 1/3 = 0,33$$

$$r_3 = 4/15 = 0,26$$

$$r_4 = 2/5 = 0,4$$

$$r_5 = 0$$



{ 5,3,2,4,1 }



$$u^0_5 = 1$$

$$u^0_3 = 1$$

$$u^0_2 = 1$$

$$u^0_4 = 1/2$$

$$u^0_1 = 0$$

$$g(u^0) = 1 + 0,8 + 0,4 > 1$$



nessun cover violato

Esempio: Prova con il secondo vincolo

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 6 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{x \in \{0,1\}^5} \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2 = 1$$

$$\hat{x}_3 = 0,8$$

$$\hat{x}_4 = 0,2$$

$$\hat{x}_5 = 1$$

Verifica secondo vincolo

$$\begin{array}{l} \Rightarrow J_2^+ = \{1,2,4,5\} \\ J_2^- = \{3\} \end{array}$$

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2$$

$$\Rightarrow y_3 = 1 - x_3$$

$$z_4 = x_4$$

$$z_5 = x_5$$

$$\Rightarrow z_1 + 2z_2 + 2y_3 + 3z_4 + 3z_5 \leq 6$$

«knapsack» a coefficienti positivi

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato I

$$z_1 + 2z_2 + 2y_3 + 3z_4 + 3z_5 \leq 6$$

$$\min_u \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j - \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1) u_j$$
$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$$\hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2 = 1$$

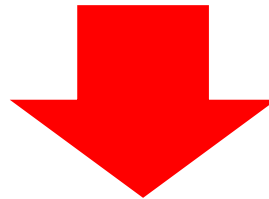
$$\hat{x}_3 = 0,8$$

$$\hat{x}_4 = 0,2$$

$$\hat{x}_5 = 1$$

$$J_2^+ = \{1,2,4,5\}$$

$$J_2^- = \{3\}$$



$$\min u_1 + 0,8u_3 + 0,8u_4$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3u_5 \geq 7 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{u \in \{0,1\}^5} & \mathbf{1_5 \geq u \geq 0_5} \end{cases}$$

Esempio: oracolo «knapsack» approssimato II

$$\min u_1 + 0,8u_3 + 0,8u_4$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 3u_4 + 3u_5 \geq 7 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{u \in \{0,1\}^5} & 1_5 \geq u \geq 0_5 \end{cases}$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = 0$$

$$r_3 = 2/5 = 0,4 \quad \Rightarrow \quad \{2, 5, 4, 3, 1\}$$

$$r_4 = 4/15 = 0,26$$

$$r_5 = 0$$

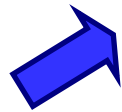
$$g(u^0) = 0,8 * 2/3 < 1$$

Non possiamo concludere che tutti i «cover» sono soddisfatti, ma u^+ , vettore di incidenza del cover $\{2, 4, 5\}$, soddisfa:

$$g(u^+) = 0,8 < 1 \quad \Rightarrow \quad z_2 + z_4 + z_5 \leq 2 \quad \Rightarrow$$

Disequazione cover violata

soluzione rilassamento



arrotondamento di u^0

$$u^0 = \begin{cases} u^0_2 = 1 \\ u^0_5 = 1 \\ u^0_4 = 2/3 \\ u^0_3 = 0 \\ u^0_1 = 0 \end{cases}$$

$$u^+ = \begin{cases} u^+_2 = 1 \\ u^+_5 = 1 \\ u^+_4 = 1 \\ u^+_3 = 0 \\ u^+_1 = 0 \end{cases}$$

Aggiungi il «cover» e risolvi nuovamente

Aggiungi il «cover» e risolvi nuovamente

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 6 \\ \mathbf{x_2 + x_4 + x_5 \leq 2} \end{cases}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5$$

Se il cover violato fosse stato $\{3, 4, 5\}$ avremmo avuto:

$$y_3 + z_4 + z_5 \leq 2 \quad \longrightarrow \quad (1 - x_3) + x_4 + x_5 \leq 2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{-x_3 + x_4 + x_5 \leq 1}$$