Ottimizzazione Combinatoria 2

Metodo di Approssimazione Primale-Duale

ANTONIO SASSANO

Università di Roma"La Sapienza"
Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale
«Antonio Ruberti»

Metodo Primale Duale

- ***Il Metodo Primale-Duale** risolve un problema di **PL***
- ***è alternativo al Metodo del Simplesso***
- ***è basato sulle Condizioni di Scarto Complementare***

$$P: \begin{array}{l} \min \quad c^T x \\ A_i x \geq b_i \ (i \in I) \\ x \geq 0_{|J|} \end{array}$$

A_i

A

A^j

A^T

$$Q: \begin{array}{l} \max \quad b^T y \\ A^j y \leq c_j \ (j \in J) \\ y \geq 0_{|I|} \end{array}$$

$\bar{x} \in P$ *soluzione primale*

$\bar{y} \in Q$ *soluzione duale*

$\bar{x}$ *Ottimo Primale*

$\bar{y}$ *Ottimo Duale*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_j > 0 \Rightarrow A^j \bar{y} = c_j \ (j \in J) \\ \bar{y}_i > 0 \Rightarrow A_i \bar{x} = b_i \ (i \in I) \end{cases}$$

Soluzioni α-approssimate

$$(PL01)\quad z^* = \min\ c^T x$$
$$x \in S \subseteq \{0,1\}^n$$

Ipotesi: $c > 0_n, x^* \neq 0_n$

Formulazione

$$(PL01)\quad z^* = \min\ c^T x$$
$$A_i x \geq b_i\ (i \in I)$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

$$P:\quad \min\ c^T x$$
$$A_i x \geq b_i\ (i \in I)$$
$$1_n \geq x \geq 0_n$$

Rilassamento Lineare

$x^* \in \{0,1\}^n$ soluzione **ottima**

$$c > 0_n, x^* \neq 0_n \rightarrow 0_n \notin S, c^T x^* > 0$$

$$\bar{x} \in S:\quad \alpha \geq \frac{c^T \bar{x}}{c^T x^*} \geq 1$$

Soluzione **α – approssimata**

*Tanto **minore** α tanto **migliore** **l'approssimazione!***

x_{LP} **ottimo del rilassamento**

$$0_n \notin S \rightarrow 0_n \notin P \rightarrow x_{LP} \neq 0_n \rightarrow c^T x_{LP} > 0$$

$$x_{LP} \in P:\quad \alpha \geq \frac{c^T x^*}{c^T x_{LP}} \geq 1$$

Integrality Gap

Tanto minore α tanto migliore
la formulazione P

Formulazioni e Algoritmi α-approssimati

$(S, c) : S \subseteq \{0,1\}^n ; c \in R^n$

Istanza di un problema π

$$(PL01) \quad z^* = \min \quad c^T x$$
$$x \in S \subseteq \{0,1\}^n$$

$x^* \in \{0,1\}^n$

ottimo dell'istanza (S,c)

Un algoritmo è α-approssimato

$\Leftrightarrow$ produce una soluzione α-approssimata per ogni istanza (S,c) di π

Una (famiglia di) formulazioni è α-approssimata

$\Leftrightarrow$ produce un integrality gap di valore α per ogni istanza (S,c) di π

Esempio: *Algoritmo Greedy per Max Indipendente*

Problema di ***Massimo*** $\rightarrow \quad \alpha \le \dfrac{c^T \bar{x}}{c^T x^*} \le 1 \qquad \bar{x} \in S$

Tanto maggiore **α** ***tanto migliore*** **l'approssimazione**

TEOREMA [Jenkyns (76), Korte-Hausman (78)]

$$q(S) = \alpha = \min_{X \subseteq \Gamma} \frac{lr(X)}{r(X)} \le \frac{c(T_n)}{c(F^*)} \le 1$$

Nella **peggior istanza** (caso peggiore $\bar{X}$): $\alpha = \dfrac{lr(\bar{X})}{r(\bar{X})} = \dfrac{1}{n}$

α ***decresce*** al crescere di n

(cattiva approssimazione)

Come calcolare α ?

$(S, c) = \min c^T x: \ x \in S$ **Istanza** di un problema π

$J = \{1, \dots, n\} \ \ S \subseteq \{0,1\}^{|J|}$

$$(PL01) \ z^* = \min c^T x$$
$$A_i x \geq b_i \quad (i \in I)$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

$A_i x \geq b_i \quad (i \in I)$
Formulazione di S

Rilassamento Lineare

$$\min c^T x$$
$$P: \ A_i x \geq b_i \quad (i \in I)$$
$$x \geq 0_n$$

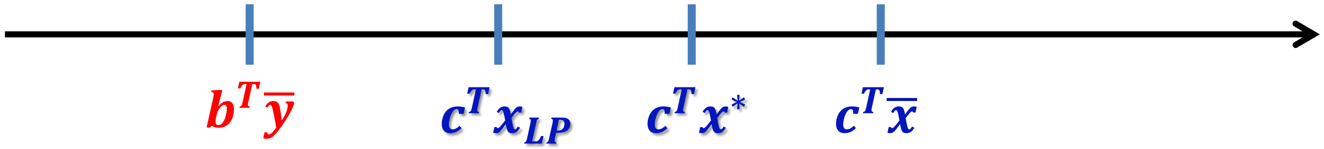
DUALE

$$\max b^T y$$
$$Q: \ A^j y \leq c_j \quad (j \in J)$$
$$y \geq 0_{|I|}$$

$$c^T x_{LP} = \min c^T x: \ x \in P$$

$x_{LP} \in P$ **Soluzione ottima del rilassamento lineare**

Come calcolare α ? (II)



- ***Calcolo dell'ottimo intero x^* è difficile (Ipotesi: $x^* \neq 0_n$)***
- **Calcolo di $\frac{c^T\bar{x}}{c^T x^*}$ è difficile ($c > 0_n \rightarrow c^T x^* > 0 \rightarrow \frac{c^T\bar{x}}{c^T x^*} \geq 1$)**
- ***Calcolo dell'ottimo del rilassamento lineare x_{LP} è più facile** (Metodo del Simplesso, Primale/Duale, etc.)*
- ***Calcolo di una soluzione $\bar{x} \in S$ oppure $\bar{y} \in Q$ con $b^T\bar{y} > 0$ è ancora più facile** (Euristiche: Greedy, Ricerca Locale, etc)*

$\rightarrow$ **Possibile calcolare $\alpha_1 = \frac{c^T\bar{x}}{c^T x_{LP}}$ e $\alpha_2 = \frac{c^T\bar{x}}{b^T\bar{y}}$**

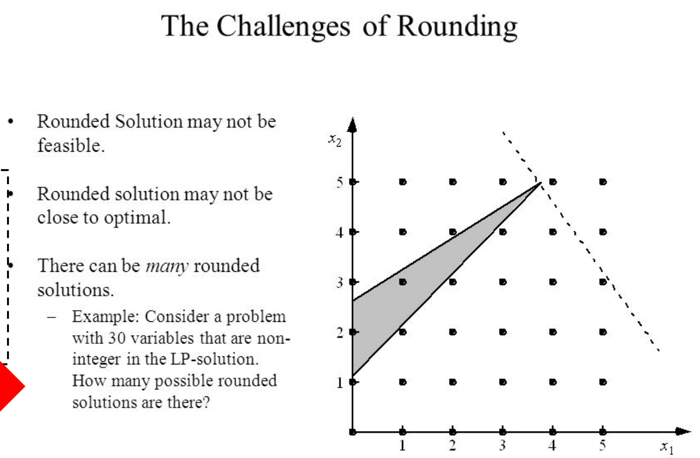
$\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \frac{c^T\bar{x}}{c^T x^*} \geq 1$ (Notare che $b^T\bar{y} > 0$ e $c^T x_{LP} > 0$)

Una facilità di calcolo crescente implica una qualità decrescente dell'approssimazione

Metodi di Approssimazione

- **ARROTONDAMENTO (Rounding)**
  - *Calcola l'ottimo del rilassamento lineare* x_{LP}
  - *Genera* $\overline{x} \in S$ ***arrotondando*** x_{LP}
  - *Calcola* $\alpha_1 = \dfrac{c^T \overline{x}}{c^T x_{LP}} \geq \dfrac{c^T x^*}{c^T x_{LP}}$

Idea euristica: ***Arrotondare una soluzione ottima frazionaria produce una soluzione*** ***ammissibile*** ***e «vicina» all'ottimo intero. Non è vero sempre ..***



- **PRIMALE-DUALE RILASSATO**
  - ***Genera una coppia di soluzioni*** $\overline{x} \in S$ ***e*** $\overline{y} \in Q$ ***con*** $b^T \overline{y} > 0$ ***che soddisfa le condizioni (rilassate) di*** ***scarto complementare***
  - ***Calcola*** $\alpha_2 = \dfrac{c^T \overline{x}}{b^T \overline{y}}$

Idea euristica: ***Una coppia*** $\overline{x} \in S$ ***e*** $\overline{y} \in Q$ ***con*** $b^T \overline{y} > 0$ ***che soddisfa le condizioni di scarto complementare è*** ***ottima per il rilassamento lineare***. ***Poiché*** $\overline{x} \in S$ ***abbiamo che*** $\overline{x} \equiv x^*$ e $\alpha_2 = 1$. ***Ma*** ***non è facile*** ***soddisfare le condizioni di complementarità, allora le approssimiamo (rilassiamo) calcolando un valore*** $\alpha_2 > 1$.

Primale Duale Rilassato (I)

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ P:\ &A_i x \geq b_i > 0 \quad (i \in I) \\ &x \geq 0_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max b^T y \\ Q:\ &A^j y \leq c_j \quad (j \in J) \\ &y \geq 0_{|I|} \end{aligned}$$

TEOREMA (Compementarità rilassata)

Dati $\bar{x} \in S$ e $\alpha \geq 1$, **se esiste** $\bar{y} \in Q$:

$$\begin{cases} \bar{x}_j > 0 \Rightarrow A^j \bar{y} = c_j \equiv \sum_{i \in I} a_{ij} \bar{y}_i = c_j \\ \bar{y}_i > 0 \Rightarrow b_i \leq A_i \bar{x} \leq \alpha b_i \equiv b_i \leq \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \leq \alpha b_i \end{cases}$$

Allora $\bar{x} \in S$ è una soluzione α−approssimata

Primale Duale Rilassato (II)

DIM: **Dati** $\bar{x} \in S$ e $\alpha \geq 1$, **se esiste** $\bar{y} \in Q$ **tale che:**

$$\begin{cases} \bar{x}_j > 0 \Rightarrow A^j \bar{y} = c_j \equiv \sum_{i \in I} a_{ij} \bar{y}_i = c_j \\ \bar{y}_i > 0 \Rightarrow b_i \leq A_i \bar{x} \leq \alpha b_i \equiv b_i \leq \sum_{j \in J} a_{ij} \bar{x}_j \leq \alpha b_i \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \bar{x} \neq 0_n \\ c > 0_n \end{array} \Rightarrow \bar{y} \neq 0_{|I|}$$

Allora: $$c^T \bar{x} = \sum_{j \in J} c_j \bar{x}_j = \sum_{\substack{j \in J \\ \bar{x}_j > 0}} c_j \bar{x}_j =$$

$$= \sum_{\substack{j \in J \\ \bar{x}_j > 0}} \sum_{i \in I} a_{ij} \bar{y}_i \bar{x}_j = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in J \\ \bar{x}_j > 0}} a_{ij} \bar{x}_j \bar{y}_i \leq \alpha \sum_{i \in I} b_i \bar{y}_i = \alpha b^T \bar{y}$$

Poiché $b > 0_{|I|}, \bar{y} \neq 0_{|I|} \Rightarrow b^T \bar{y} > 0 \Rightarrow \alpha \geq \frac{c^T \bar{x}}{b^T \bar{y}} \geq \frac{c^T \bar{x}}{c^T x^*} \geq 1$

e dunque $\bar{x} \in S$ **è una soluzione** α**−approssimata** ■

Primale Duale Rilassato - il minimo α

$\alpha \geq 1$ è necessario per rilassare il vincolo di uguaglianza nelle condizioni di scarto complementare:

$$\bar{y}_i > 0 \Rightarrow b_i \leq A_i\bar{x} \leq \alpha b_i$$

- La condizione $A_i\bar{x} \geq b_i$ è soddisfatta ($\bar{x} \in S \subseteq P$)
- Invece, per qualche $\bar{y}_i > 0$ potremmo avere $A_i\bar{x} > b_i$
- Il valore $\alpha \geq 1$ garantisce che $A_i\bar{x} \leq \alpha b_i$

Vogliamo il ***minimo valore*** di α per il quale ***tutti*** i vincoli con $\bar{y}_i > 0$ e $A_i\bar{x} > b_i$ soddisfano $A_i\bar{x} \leq \alpha b_i$

$$\alpha_{min} \geq \frac{A_i\bar{x}}{b_i} \quad \forall\, i\colon \bar{y}_i > 0$$

$$\boxed{\alpha_{min} = \max_{\bar{y}_i > 0} \frac{A_i\bar{x}}{b_i}}$$

Rafforziamo il Teorema

TEOREMA (Complementarità rilassata)

Data $\bar{x} \in S$, se esiste $\bar{y} \in Q$ tale che:

$$\bar{x}_j > 0 \Rightarrow A^j\bar{y} = c_j \qquad (A^j\bar{y} < c_j \Rightarrow \bar{x}_j = 0)$$

Allora $\bar{x} \in S$ **è una soluzione α_{min}-approssimata con:**

$$\boxed{\alpha_{min} = \max_{\bar{y}_i > 0} \frac{A_i\bar{x}}{b_i}}$$

Idea: α **non è data** ma è il ***minimo valore*** compatibile con le soluzioni ($\bar{x}$, $\bar{y}$) e la condizione di scarto complementare eliminata.

STRUTTURA *degli* ***Algoritmi approssimati Primali-Duali***:

- *Scegli* ***una qualsiasi soluzione*** *iniziale* $\bar{y} \in Q$
- ***Cerca*** *una* ***soluzione ammissibile (0,1)*** $\bar{x}$ *con* $\bar{x}_j = 0$ *per ogni* $j \in J$ *tale che* $A^j\bar{y} < c_j$
- ***Se esiste:*** $\bar{x}$ *è una soluzione* α_{min}**−approssimata**
- ***Se non esiste:*** ***aggiorna*** $\bar{y}$ ***e ripeti***