Ottimizzazione Combinatoria 2

Sistemi di Indipendenza
Formulazioni

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale "Antonio Ruberti"
Università di Roma "Sapienza"

A.A. 2016

Il Rango caratterizza $\mathcal{S}$

TEOREMA I1:

$$\boxed{F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow |\, F \cap X \,| \leq r(X) \quad \forall\ X \subseteq \Gamma}$$

DIMOSTRAZIONE:

Se $F \in \mathcal{S} \Rightarrow (F \cap X) \in \mathcal{S}\ \forall X \subseteq \Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow |\, F \cap X \,| = r(F \cap X) \leq r(X)\ \forall X \subseteq \Gamma$

rango non decrescente

Per il viceversa dobbiamo dimostrare che:

$$\boxed{F \notin \mathcal{S} \Rightarrow \exists\ X \subseteq \Gamma : |\, F \cap X \,| > r(X)}$$

e infatti, se $F \notin \mathcal{S} \Rightarrow |F| > r(F)$

$\Rightarrow$ **per** $X = F$ **abbiamo** $|\, F \cap X \,| = |F| > r(F) = r(X)$

$\Rightarrow \exists\ X \subseteq \Gamma : |\, F \cap X \,| > r(X)$

■

Formulazione Rango

$$\text{(MIS)} \quad \max \{\, c(F) : F \text{ è un } \textbf{indipendente} \text{ di } \mathcal{S} \,\}$$

Problema di ***Ottimizzazione Combinatoria*** con *funzione obiettivo lineare*

$$S = \{x^F : \text{ vettore di incidenza di } F \in \mathcal{S}\}$$

Abbiamo dimostrato che:

$$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow |F \cap A| \leq r(A) \quad \forall\, A \subseteq \Gamma$$

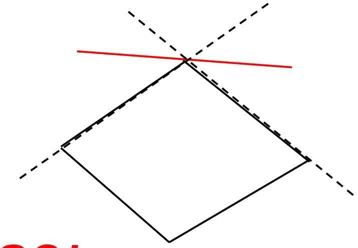
$|F \cap A| =$ *prodotto interno dei vettori di incidenza di* F *ed* A

$$x^F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |F \cap A| = (x^F)^T (x^A) = \sum_{e \in \Gamma} x_e^F x_e^A = \sum_{e \in A} x_e^F$$

$$\Rightarrow \quad x^F \in S \Leftrightarrow \sum_{e \in A} x_e^F \leq r(A) \quad \forall\, A \subseteq \Gamma$$

Formulazione Rango I

$S = \{x :$ **vettore di incidenza di** $F \in \mathcal{S} \}$



$x \in S$ se e solo se appartiene al poliedro:

$$P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \le r(A), & A \subseteq \Gamma, \\ x_e \ge 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

Ridondanti se:

$\exists e \in \Gamma$: $r(A \cup \{e\}) = r(A)$

$\exists\, A_1, A_2 : A = A_1 \cup A_2 \;\wedge$
$r(A_1) + r(A_2) = r(A)$

FORMULAZIONE:

$$P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \le r(A), & A \subseteq \Gamma, A \text{ chiuso e inseparabile} \\ x_e \ge 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

A *chiuso* $\rightarrow\; r(A \cup \{e\}) > r(A) \quad \forall e \in \Gamma / A$

A *inseparabile* $\rightarrow\; r(A_1) + r(A_2) > r(A) \quad \forall\, A_1, A_2 : A = A_1 \cup A_2$

Formulazione Rango II

(MIS) max { c(F): F è un *indipendente* di $\mathcal{S}$ }

Problema di ***Ottimizzazione Combinatoria*** con *funzione obiettivo lineare*

FORMULAZIONE:

$$P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \le r(A), & A \subseteq \Gamma, A \text{ chiuso e inseparabile} \\ x_e \ge 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

(MIS)

$$\max \; c^T x$$
$$x \in P_R \cap \{0,1\}^n$$

P_R rilassamento formulazione ottima

Formulazione Circuiti

$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{ C \not\subset F : C$ Circuito di $\mathcal{S} \}$

C Circuito di $\mathcal{S} \Rightarrow r(C)=|C|-1$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 & \forall \text{ circuito } C \\ x_e \geq 0, e \in \Gamma \end{cases}$$

$$P_C \supseteq P_R = \begin{cases} \sum_{e \in A} x_e \leq r(A), A \subseteq \Gamma \\ x_e \geq 0, e \in \Gamma \end{cases}$$

TEOREMA I2: $F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x^F \in P_C$ (P_C è una FORMULAZIONE)

DIMOSTRAZIONE:

$F \in \mathcal{S} \Rightarrow x^F \in P_R \Rightarrow x^F \in P_C$

Se viceversa $F \notin \mathcal{S} \Rightarrow$ esiste un circuito $C \subseteq F \Rightarrow$

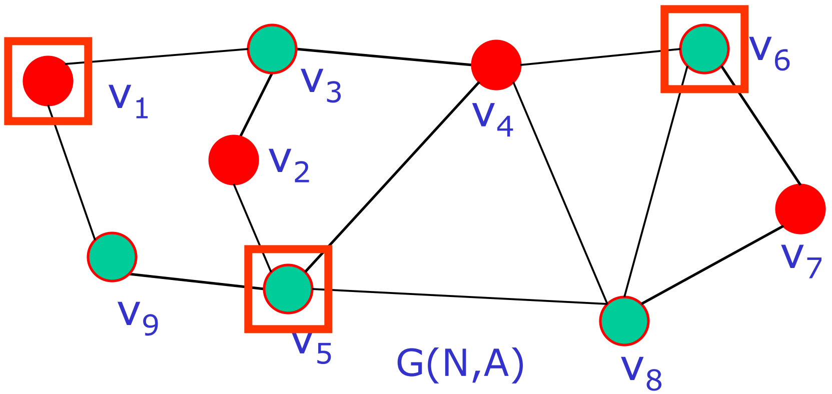
$$\Rightarrow x_e^F = 1 \quad \forall e \in C \Rightarrow \sum_{e \in C} x_e^F = |C| \Rightarrow x_e^F \notin P_C$$

P_C rilassamento formulazione ottima

Formulazione Circuiti (Insieme stabile)

$\mathcal{S}$ = {*insiemi stabili di un grafo* G(V,E)}

Insiemi di **nodi** a coppie ***non adiacenti***



Elementi* = *nodi

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots\}$

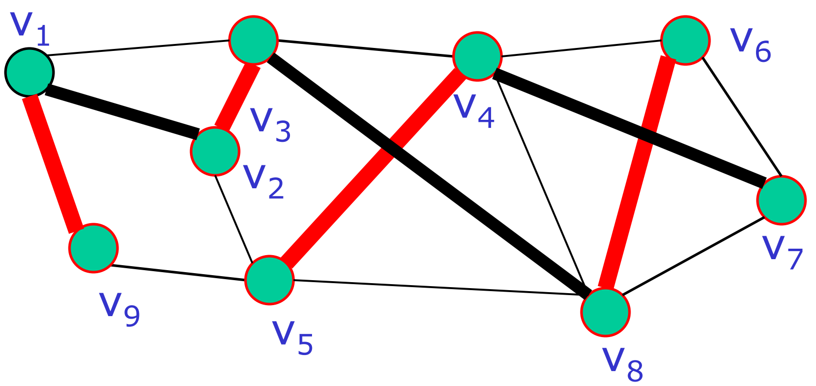
Circuiti: $\{u, v\}$: $uv \in E$

$$P_C = \begin{cases} x_u + x_v \leq 1, & \forall\ uv \in E \\ x_u \geq 0, & \forall\ u \in V \end{cases}$$

Formulazione circuiti ("matching")

$\mathcal{S}$ = {**"matching" di un grafo** $G(V,E)$}

Insiemi di **archi** a coppie ***non incidenti nello stesso nodo***



Elementi* = *archi

$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{v_1v_2\}, \{v_3v_8\}, \{v_1v_2, v_3v_8\}, \ldots\}$

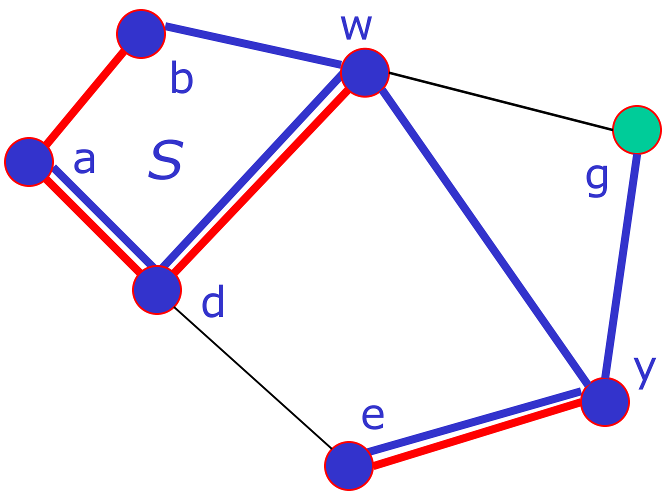
Circuiti = $\{e,f\}$ ***con*** e, f ***incidenti nello stesso nodo***

$$P_C = \begin{cases} x_e + x_f \leq 1, \forall\, e, f \in \delta(v), v \in V \\ x_e \geq 0, \qquad\qquad \forall\, e \in E \end{cases}$$

Formulazione ottima se e solo se il grafo è bipartito

Formulazione Circuiti (Foreste)

S = {insiemi di foreste di un grafo $G(V,E)$}



Elementi = archi

Circuito = ciclo

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ ciclo } C \\ x_e \geq 0, e \in E \end{cases}$$

Formulazione “Cover” (“Knapsack”)

$\mathcal{S}$ = { insiemi di progetti “compatibili” con un “budget”}

$3x_1+2x_2+x_3+\boxed{2}x_4 \leq \boxed{5}$

Elementi = progetti

“risorse” per il progetto

“budget”

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\} \ldots\}$

Indipendenti = soluzioni di “knapsack” a coefficienti positivi

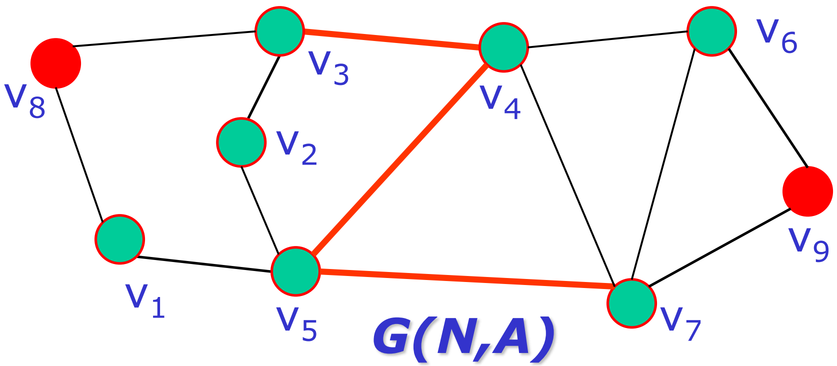
Circuito (“Cover”) = un insieme di progetti non “compatibile” ma tale che ogni sottoinsieme è “compatibile”

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ cover } C \\ x_e \geq 0, e \in \Gamma \end{cases}$$

Formulazione tagli ("grafo co-connesso")

Grafo connesso $G(N,A)$

$\mathcal{S}$ = { insiemi di archi la cui rimozione **non disconnette** il grafo $G(N,A)$ }



Elementi = archi

$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{v_8v_1\}, \{v_8v_1, v_2v_3\}, \ldots\}$

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \bar{T})$ connesso

Circuiti = Tagli minimali

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \leq |K| - 1 & \forall \text{ taglio } K \\ x_e \geq 0, e \in E \end{cases}$$

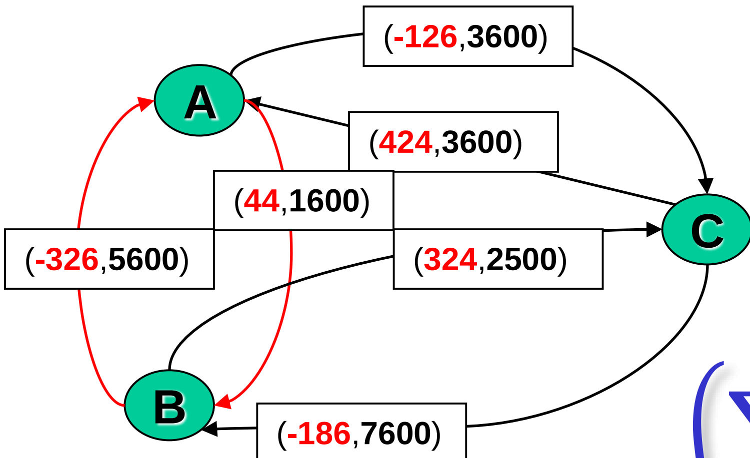
Formulazione Circuiti: "grafo senza cicli negativi"

Grafo connesso G(N,A)

c_e costo di un arco $e \in A$

S = { insiemi di archi che **non** contengono cicli a **costo totale negativo** }

$$\sum_{e \in C} c_e < 0$$



Elementi = archi

Circuito = ciclo (orientato) a costo totale negativo

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 & \forall \text{ ciclo negativo } C \\ x_e \geq 0, e \in E \end{cases}$$

Formulazione circuiti

$$\begin{cases} x_{AB} + x_{BA} \leq 1 \\ x_{BA} + x_{AC} + x_{CB} \leq 2 \\ \ldots.. \end{cases}$$

Nel grafo dell'esempio

Formulazione Rango – Ottima?

ESEMPIO: $\mathcal{S}$ = { **insiemi di progetti "compatibili" con un "budget"** }

$$S=\{\, y\in\{0,1\}^5:\ 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 2y_5 \le 11 \,\}$$

$$P_S = \{\, y\in R^5 : Ay \le b,\ y \ge 0_5 \,\}$$

P_C:

$$y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + y_4 + y_5 \le 2$$

P_R:

$$y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + y_4 + y_5 \le 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 \le 2$$

$$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 \le 4$$
$$1 \ge y_1, \dots, y_5 \ge 0$$

$$y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 + y_3 \le 1$$
$$y_1 + y_4 + y_5 \le 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 \le 2$$

Formulazione Rango $P_R \subset P_C$

In questo caso P_R **non è ottima** ma solo un **sottoinsieme** della formulazione ottima P_S (*rilassamento della formulazione ottima*)

Come dimostrare che una formulazione è ottima?

Problema di PL01: $\boxed{z^* = \max_{x \in S} c^T x}$

$\boxed{P = \{x \in \mathcal{R}^n : Dx \le d\}}$ formulazione di S

$\boxed{P = P_S = \{x \in \mathcal{R}^n : Ax \le b\} = Conv(S) \,?}$

Si può dimostrare che :

- Ogni disequazione del sistema $Ax \le b$ è **implicata** dal sistema $Dx \le d$;

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -2x_4 & \le 2 \\
(1/2) & 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & \le 2 \\
\hline
 & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & -3x_4 & \le 3
\end{array}
$$

- Oppure che ***ogni vertice*** di P ha **componenti (0,1)**

- Oppure che, ***per ogni*** $c \in \mathcal{R}^n$, la soluzione ottima x^* del problema $\max_{x \in P} c^T x$ ha **componenti (0,1)**

Formulazione Rango e Matroidi

TEOREMA: Se il **Sistema di Indipendenza** $\mathcal{S}$ è una **MATROIDE** **allora** la **formulazione rango** P_R è la **formulazione ottima.**

Dim. La **coppia primale-duale** corrispondente alla **formulazione rango** è la seguente:

$$\max \sum_{e\in\Gamma} c_e\, x_e$$

$$\sum_{e\in A} x_e \le r(A) \quad \forall A \subseteq \Gamma$$

$$x_e \ge 0 \qquad \forall e \in \Gamma$$

$$\min \sum_{A\subseteq\Gamma} r(A)\, y_A$$

$$\sum_{A\ni e} y_A \ge c_e \quad \forall e \in \Gamma$$

$$y_A \ge 0 \quad \forall A \subseteq \Gamma$$

$$\max c^T x$$
$$Dx \le r$$
$$x \ge 0_n$$

$$\begin{array}{c|cc|}
 & e \in A & e \notin A \\
\hline
A & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

D

$$\min r^T y$$
$$D^T y \ge c$$
$$y \ge 0_{2^n}$$

$$\begin{array}{c|cc|}
 & A \ni e & A \not\ni e \\
\hline
e & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

D^T

Formulazione Rango e Matroidi

Poniamo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$ e ricordiamo che gli elementi con $c_i < 0$ possono essere eliminati senza modificare il valore delle soluzioni ottime primali e duali.

Poniamo $A_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ per $i = 1, \dots, n$

Il seguente vettore y è una **soluzione ammissibile per il problema duale**:

$$\begin{cases} y_{A_i} = c_i - c_{i+1} & 1 \leq i \leq n-1 \\ y_{A_n} = c_n & i = n \\ y_A = 0 & A \neq A_i \end{cases}$$

Infatti $c_i \geq 0$ per $i \in \{1, \dots, n\}$ e $c_i \geq c_{i+1}$ per $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e dunque $y_A \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Gamma$. **Inoltre**:

$$\boxed{\sum_{A: e_i \in A} y_A = \sum_{j \geq i} y_{A_j} = c_n + \sum_{j=i}^{n-1} (c_j - c_{j+1}) = c_i}$$

$$\begin{array}{c} c_i - \cancel{c_{i+1}} \\ \cancel{c_{i+1}} - c_{i+2} \\ c_{i+2} - c_{i+3} \\ \dots \\ \cancel{c_{n-1}} - c_n \end{array}$$

Formulazione Rango e Matroidi

Sia T_n *la* **soluzione «greedy»** e $T_i = A_i \cap T_n$ *e sia* $\bar{x}$ *il* ***vettore di incidenza di*** T_n***,*** *abbiamo che:*

$$\boxed{\bar{x}_i = 1 \;\Rightarrow\; r(A_i) - r(A_{i-1}) = 1} \qquad \equiv \qquad \boxed{\bar{x}_i = r(A_i) - r(A_{i-1})}$$
$$\boxed{\bar{x}_i = 0 \;\Rightarrow\; r(A_i) - r(A_{i-1}) = 0}$$

Infatti, poiché $\mathcal{S}$ è *una* ***MATROIDE*** abbiamo che: $lr(A_i) = r(A_i)$

e dunque $\boxed{lr(A_i) = |T_i| = r(A_i)}$

Ora, **se** $e_i \in T_n$ $(\bar{x}_i = 1)$ abbiamo che $T_i = T_{i-1} \cup \{e_i\}$
e quindi $r(A_i) - r(A_{i-1}) = 1$

Se invece $e_i \notin T_n$ $(\bar{x}_i = 0)$ abbiamo che $T_i = T_{i-1}$
e quindi $r(A_i) - r(A_{i-1}) = 0$

Formulazione Rango e Matroidi

Sia T_n la **soluzione «greedy»** e $\bar{x}$ il suo **vettore di incidenza,** abbiamo che: $\boxed{\bar{x}_i = r(A_i) - r(A_{i-1})}$

Il valore della soluzione «greedy» è dunque:

$$\sum_{e \in T_n} c_e = \sum_{e_i \in \Gamma} c_i \bar{x}_i = \sum_{e_i \in \Gamma} c_i \big(r(A_i) - r(A_{i-1}) \big) = \sum_{i=1}^{n} c_i \big(r(A_i) - r(A_{i-1}) \big)$$

$$= \boxed{c_n} r(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(A_i) \boxed{(c_i - c_{i+1})}$$

$$= y_{A_n} r(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(A_i)\ y_{A_i} = \sum_{A \subseteq \Gamma} r(A) y_A$$

Uguale al valore della soluzione duale y e dunque, per ogni possibile valore $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$, il **vettore di incidenza** $\bar{x}$ della corrispondente soluzione «greedy» è ottimo per il problema primale e dunque $P_R = P_S$ (la formulazione rango è ottima)

Provare a dimostrare che .. (fuori esame)

- Nel caso del Sistema di Indipendenza delle **foreste di un grafo** la formulazione rango e la formulazione cicli (circuiti) coincidono e costituiscono la formulazione ottima del problema.

- Dimostrare che la formulazione circuiti del problema di **Matching su grafo bipartito** costituisce la formulazione ottima del problema.

- Possono esistere disequazioni ridondanti (ottenibili come combinazione conica di altre) nella formulazione rango di una matroide? Riesci a scriverne una nel caso della matroide delle foreste di un grafo?

- Nella matroide delle foreste di un grafo, una disequazione rango $x(A) \leq r(A)$ con $G(V, A)$ non connesso è ridondante? Perché si o perché no?

- Nella matroide delle foreste di un grafo, una disequazione rango $x(A) \leq r(A)$ con $r(A) = r(A \setminus \{e\})$ per qualche arco $e \in A$ è ridondante? Perché si o perché no?

Formulazione circuiti - complessità

Quanti vincoli nelle formulazioni circuiti?

$$P_C = \begin{cases} x_u + x_v \le 1, & uv \in E \\ x_u \ge 0, & u \in V \end{cases}$$

Insieme stabile: $|V|^2$

$$P_C = \begin{cases} x_e + x_f \le 1, & e,f \in \delta(v) \quad v \in V \\ x_f \ge 0, & f \in E \end{cases}$$

"matching": $|E|^2$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \le |C| - 1, & C \text{ ciclo} \\ x_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in C} x_e \le |C| - 1, & C \text{ "cover"} \\ x_e \ge 0, & e \in \Gamma \end{cases}$$

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \le |K| - 1, & K \text{ taglio} \\ x_e \ge 0, & e \in E \end{cases}$$

Cicli, "Cover" e Tagli
possono essere in numero esponenziale!

Un grafo planare con n nodi può contenere 2.27^n cicli $\quad n=100 \Rightarrow 10^{34}$ cicli!!

Non possiamo neanche "scrivere" il rilassamento lineare!

Abbiamo bisogno di potenziare il Metodo del Simplesso (per la PL)

→ Metodo del Simplesso Dinamico