Ottimizzazione Combinatoria 2

Flusso Multicommodity
Rilassamento Lagrangiano

Prof. **Antonio Sassano**
Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale "Antonio Ruberti"
Università di Roma "Sapienza"

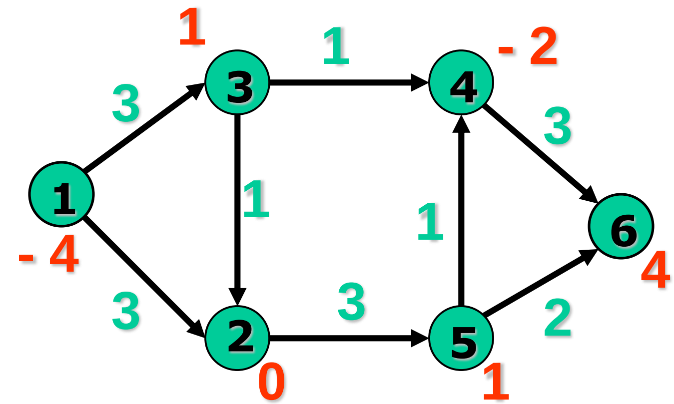
A.A. 2016

Flusso (di un singolo bene) in un grafo orientato

DATI: *Un grafo orientato* $G(N,A)$

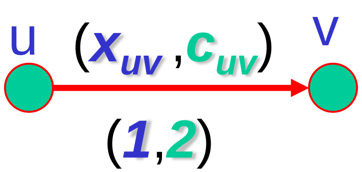
Un vettore capacità $c \geq 0_{|A|}$

Un vettore domanda $d \in R^{|N|}$



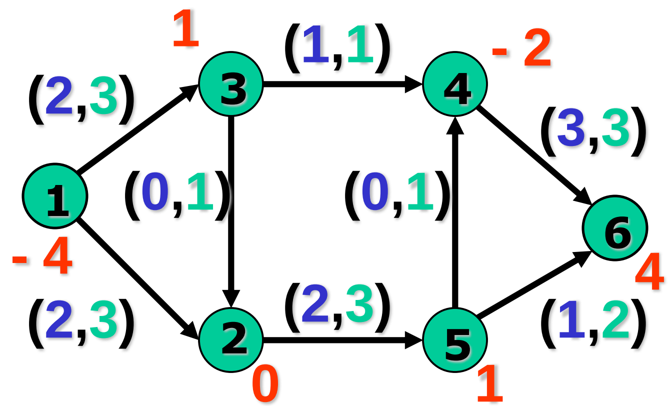
DIREMO: **FLUSSO** di (G,c,d)

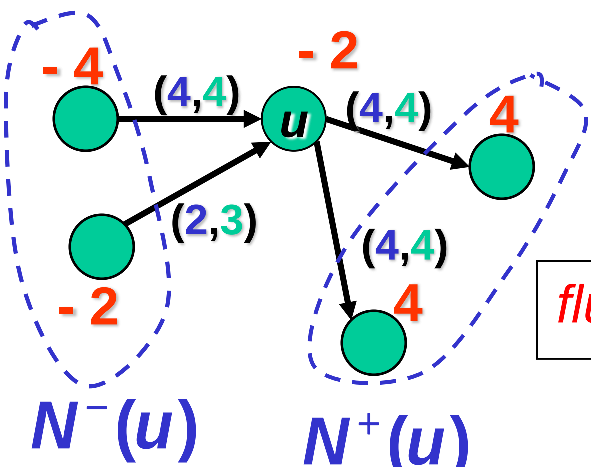
un vettore $x \in R^{|A|}$ tale che:



$$0 \leq x_{uv} \leq c_{uv}$$

[vincolo di capacità]





$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u} - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i} = d_u \quad \forall u \in N$$

flusso entrante - *flusso uscente* = *domanda*

[conservazione del flusso]

Problema del Flusso di Costo Minimo

DATO: un vettore di **costi associati agli archi** $W \in R^{|A|}$

(MCF)

$$\min \quad w^T x = \sum_{uv \in E} w_{uv} x_{uv}$$

$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u} - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i} = d_u \,, \qquad u \in N$$

$$0 \le x_{uv} \le c_{uv} \,, \qquad uv \in A$$

coefficienti della riga associata al nodo u

	$v_i u : v_i \in N^-(u)$			$uv_i : v_i \in N^+(u)$			Archi non incidenti in u					
u	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0

riga u della matrice di incidenza M

(MCF)
$$\begin{array}{l} \min \quad w^T x \\ Mx = d \\ 0_{|A|} \le x \le c \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \min \quad w^T x \\ x \in Q \end{array}$$

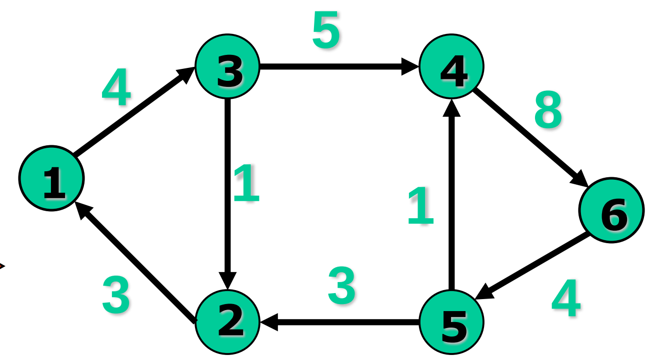
$$Q = \{ x : Mx = d, 0_{|A|} \le x \le c \}$$

.. e se nella rete fluiscono *p* beni diversi?

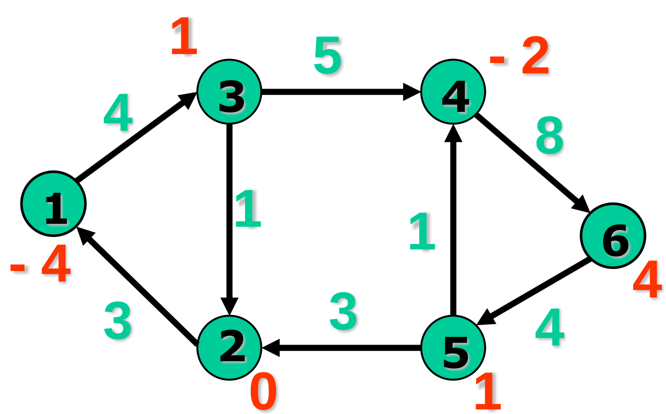
DATI: *Un grafo orientato* ***G(N,A)***

Un unico *vettore* *capacità* ***C*** $\geq$ ***0***$_{|A|}$

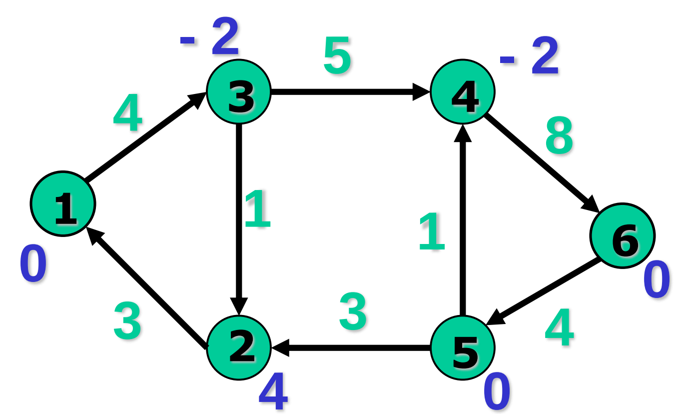
p *vettori* *domanda* $d^i \in R^{|N|}$ $i=1,\ldots,p$



Rete unica (es. ***TELECOM****)*



Domanda d^1 *(es.* ***POSTE****)*

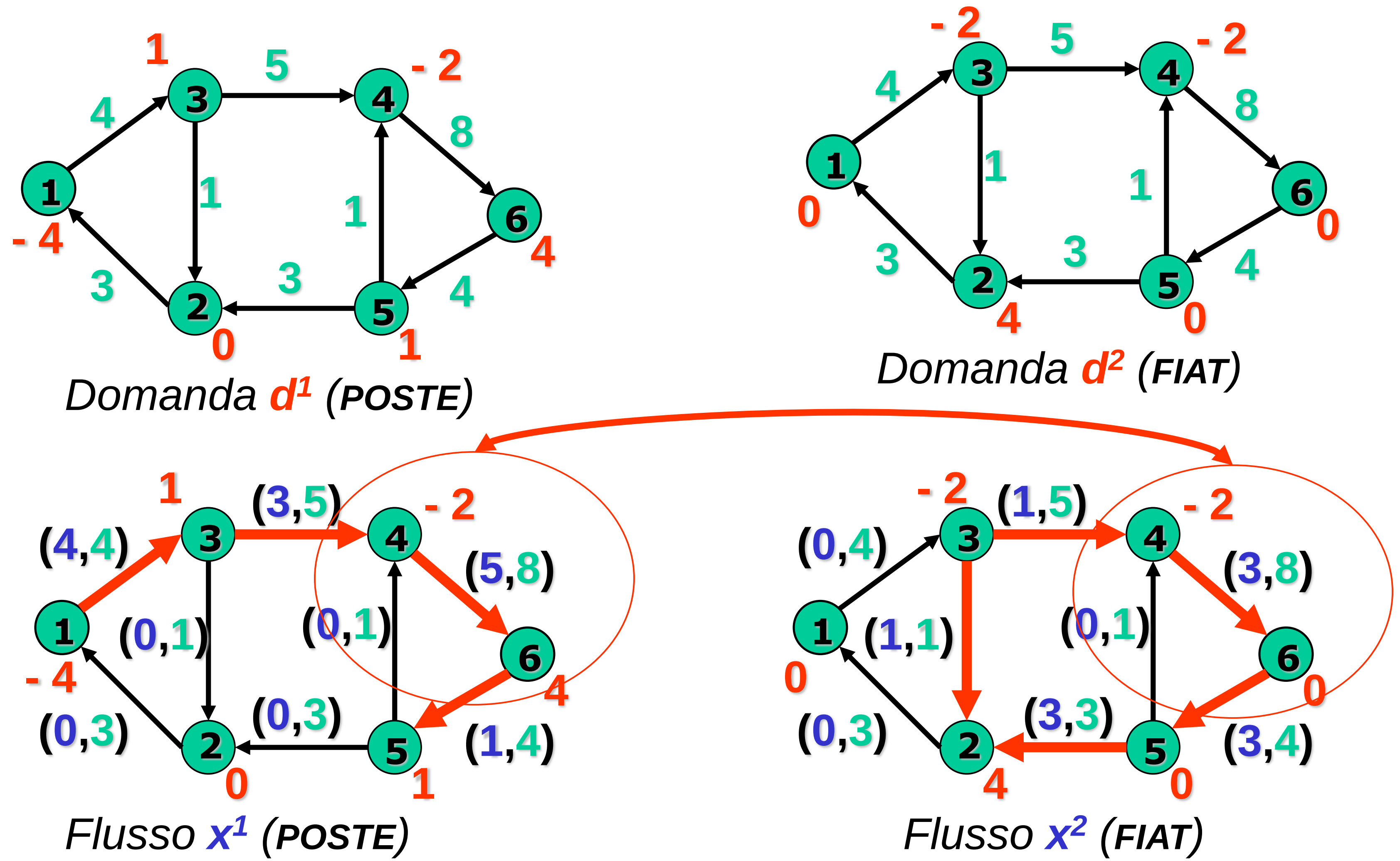


Domanda d^2 *(es.* ***FIAT****)*

- ***Somma di*** ***tutti i beni*** ***che "fluiscono" su un arco*** $\leq$ ***capacità***
- ***Nel nodo si conserva il*** ***flusso di ciascun bene***

Dobbiamo generalizzare il concetto di ***flusso***

Flusso multi-bene ("multi-commodity")



Domanda d^1 (**POSTE**)

Domanda d^2 (**FIAT**)

Flusso x^1 (**POSTE**)

Flusso x^2 (**FIAT**)

- ***Somma di <u>tutti i beni</u> che "fluiscono" su un arco ≤ capacità***
- ***Nel nodo si conserva il <u>flusso di ciascun bene</u>***

Flusso "multi-commodity" in un grafo orientato

DATI: Un grafo orientato **G(N,A)** e p «beni» $K = \{1, \dots, p\}$

Un vettore capacità $c \geq 0_{|A|}$

Una matrice di domanda $D \in R^{|N| \times p}$ $\quad D = [d^1, d^2, \dots, d^p]$

$x^k \in R^{|A|}$ Flusso di (G,c,d^k) $\quad k \in K = \{1, \dots, p\}$

$$[x_{uv}^k]_{uv \in A}^{k \in K} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^p \end{bmatrix}$$

FLUSSO "multi-commodity"

di (G,c,D)

$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u}^k - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i}^k = D_{uk} \quad \forall u \in N; \ \forall k \in K$$

[conservazione del flusso della "commodity" k]

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} x_{uv}^k \leq c_{uv} \quad uv \in A$$

[vincolo di capacità]

Flusso "multicommodity" di Costo Minimo

DATI: Grafo orientato $G(N, A)$; commodities $K = \{1, \dots, p\}$
costi $w \in R^{|A| \times p}$ associati alle **coppie arco-commodity**

(MCMF) $\min \sum_{uv \in A} \sum_{k \in K} w_{uv}^k x_{uv}^k$

$$\sum_{v_i \in N^-(u)} x_{v_i u}^k - \sum_{v_i \in N^+(u)} x_{u v_i}^k = D_{uk} \quad \forall u \in N; \ \forall k \in K$$

$$0 \le \sum_{k \in K} x_{uv}^k \le c_{uv} \quad uv \in A$$

(MCMF) $\min \sum_{uv \in A} \sum_{k \in K} w_{uv}^k x_{uv}^k$

$$\begin{cases} Mx^1 = d^1 \\ Mx^2 = d^2 \\ \dots \\ Mx^p = d^p \end{cases}$$

Conservazione del flusso

$$0 \le \sum_{k=1}^{p} x_{uv}^k \le c_{uv} \quad uv \in A$$

Capacità (accoppiamento)

Flusso "multicommodity" di Costo Minimo

(MCMF) $\min \sum_{uv \in A} \sum_{k \in K} w_{uv}^k x_{uv}^k$

$$\begin{cases} Mx^1 = d^1 \\ Mx^2 = d^2 \\ \quad \dots \\ Mx^p = d^p \end{cases}$$

$$0 \leq \sum_{k \in K} x_{uv}^k \leq c_{uv} \quad uv \in A$$

Rilassamento Lagrangiano dei vincoli di capacità

$$\boxed{\sum_{k \in K} x_{uv}^k \leq c_{uv} \quad uv \in A}$$

$\lambda \in R_+^{|A|}$

Pesa la violazione con λ

$$x_{uv}^k \geq 0 \quad uv \in A, k \in K \quad \Rightarrow \quad c \geq x^k \geq 0_{|A|}, k \in K$$

Sostituisci la restrizione con i **vincoli di capacità «singolo bene»**

Rilassamento lagrangiano (MCFP)

$$R(\lambda)\ \min \sum_{uv\in A}\sum_{k\in K} w_{uv}^k x_{uv}^k + \sum_{uv\in A} \lambda_{uv}\left(\sum_{k\in K} x_{uv}^k - c_{uv}\right)$$

$$R(\lambda)\ \min \sum_{uv\in A}\sum_{k\in K} (w_{uv}^k+\lambda_{uv})x_{uv}^k - \sum_{uv\in A} \lambda_{uv}c_{uv}$$

costante per λ fissato

$$\begin{cases} Mx^1 = d^1 \\ Mx^2 = d^2 \\ \dots \\ Mx^p = d^p \end{cases}$$

$$c \geq x^k \geq 0_{|A|}, k \in K$$

Decomposto in |K| problemi di flusso di costo minimo (λ fissato) :

$$\min \sum_{uv\in A} (w_{uv}^k+\lambda_{uv})x_{uv}^k$$

$$Mx^k = d^k$$

$$c \geq x^k \geq 0_{|A|}$$

$\overline{x}^k$

flusso ottimo

$$[\overline{x}_{uv}^k] = \begin{bmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \\ \vdots \\ \overline{x}^p \end{bmatrix}$$

Flusso multicommodity ottimo per λ fissato

Subgradiente applicato al Duale Lagrangiano $R(\lambda)$

- **Scegli** $\varepsilon, \theta^{(0)}, \lambda^{(0)}$ e **Poni** $i := 0,\ L^{Best} := -\infty$.

PASSO i

- **Trova** $R(\lambda^{(i)})$

  Risolvi |K| problemi di flusso di minimo costo

  Sia $\left[\bar{x}_{uv}^{k}\right]$ **il flusso ottimo MC**

- **Se** $L^{Best} < R\left(\lambda^{(i)}\right) \ \rightarrow\ L^{Best} := R\left(\lambda^{(i)}\right);\ \lambda^{Best} := \lambda^{(i)}$

- **Definisci** $\lambda^{(i+1)} \in R_{+}^{|A|}$

$$\lambda_{uv}^{(i+1)} = \max\left(0, \lambda_{uv}^{(i)} + \theta^{(i)}\left(\sum_{k \epsilon K} \bar{x}_{uv}^{k} - c_{uv}\right)\right)$$

Subgradiente:

Violazione vincolo:

$$\sum_{k \in K} \bar{x}_{uv}^{k} \leq c_{uv}$$

da parte di $\left[\bar{x}_{uv}^{k}\right]$

- $\theta^{(i+1)} = \dfrac{\theta^{(i)}}{2}$

- **Se** $\theta^{(i+1)} < \varepsilon$

  or $\sum_{k \epsilon K} \bar{x}_{uv}^{k} = c_{uv}\ \ \forall uv \in A \ \rightarrow\ \lambda^{Best}$

  soluzione migliore (euristica)

- **Altrimenti:** $i := i + 1$