Ottimizzazione Combinatoria 2

Algoritmo Primale-Duale per il Set Covering

ANTONIO SASSANO

Università di Roma"La Sapienza"
Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale
«Antonio Ruberti»

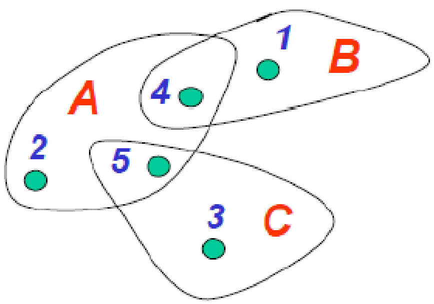
Primale-Duale del rilassamento Set Covering

$$\min c^T x \qquad\qquad \max\ 1^T y$$

$$P: \begin{cases} \sum_{e \in F} x_e \geq 1, & F \in I \\ x_e \geq 0, & e \in J \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} \sum_{F: e \in F} y_F \leq c_e & (e \in J) \\ y \geq 0_{|I|} \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$c = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1]$$



$$J = \{1,2,3,4,5\}$$
$$I = \{A,B,C\}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_5 + x_4 \geq 1 & (A) \\ x_1 + x_4 \geq 1 & (B) \\ x_3 + x_5 \geq 1 & (C) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B \leq 1 & (1) \\ y_A \leq 2 & (2) \\ y_C \leq 2 & (3) \\ y_A + y_B \leq 1 & (4) \\ y_A + y_C \leq 1 & (5) \\ y_A, y_B, y_C, \geq 0 \end{cases}$$

Approssimazione Primale-Duale: Set-Covering

TEOREMA (Compementarità rilassata)

Data $\overline{x} \in S$, **se esiste** $\overline{y} \in Q$ **tale che:**

$$\overline{x}_j > 0 \;\Rightarrow\; A^j\overline{y} = c_j \qquad (A^j\overline{y} < c_j \;\Rightarrow\; \overline{x}_j = 0)$$

Allora $\overline{x} \in S$ è una soluzione $\max\limits_{\overline{y}_i>0} \dfrac{A_i\overline{x}}{b_i}$ **– approssimata**

Nel caso del Set-Covering abbiamo:

- $\overline{x} \in S \Leftrightarrow \overline{x}$ **vettore di incidenza di un cover** T
- **ovvero** T: $\quad |T \cap F_i| \geq 1 \;\; \forall\, F_i \in I$
- **e inoltre:** $\overline{x}_e > 0 \Leftrightarrow e \in T$

La condizione del teorema diviene:

- $e \in T \;\Rightarrow\; \sum_{F_i \ni e} \overline{y}_{F_i} = c_e \qquad (\sum_{F_i \ni e} \overline{y}_{F_i} < c_e \;\Rightarrow\; e \notin T)$

con $\max\limits_{\overline{y}_i>0} \dfrac{A_i\overline{x}}{b_i} = \max\limits_{\substack{F_i \in I \\ \overline{y}_i>0}} \dfrac{\sum_{e \in F_i} \overline{x}_e}{1} = \max\limits_{\overline{y}_i>0}(|T \cap F_i|) = \alpha_{min}$

Teorema di Approssimazione Primale-Duale: SetCovering

TEOREMA: Dato un cover $T \subseteq J$, se esiste $\bar{y} \in Q$:

$$e \in T \Rightarrow \sum_{F_i \ni e} \bar{y}_{F_i} = c_e \qquad \left(\sum_{F_i \ni e} \bar{y}_{F_i} < c_e \Rightarrow e \notin T\right)$$

Allora T **è una soluzione** $\max_{\bar{y}_i > 0}(|T \cap F_i|)$**– approssimata**

STRUTTURA dell'**Algoritmo approssimato Primale-Duale**:

- Scegli **una soluzione** iniziale $\bar{y} \in Q$ **(ad es.** $\bar{y} = 0_{|I|}$**)**
- **Poni** $J^{=} = \left\{ e \in J : \sum_{F_i \ni e} \bar{y}_{F_i} = c_e \right\}$
- **Cerca** un cover $T \subseteq J^{=}$
- **Se esiste:** T è soluzione $\max_{\bar{y}_i > 0}(|T \cap F_i|)$**– approssimata**
- **Se non esiste:** ***aggiorna*** $\bar{y}$ ***e ripeti***

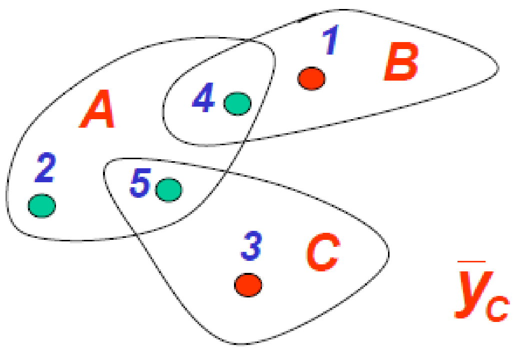
Primale Duale Approssimato: Set-Covering

Se esistono $\bar{y} \in Q$ e $T : |T \cap F| \geq 1 \quad \forall F \in I$ tali che:

$$e \in T \Rightarrow \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F = c_e \quad (e \in J) \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha\text{-approssimata} \\ \alpha = \max |T \cap F| \quad (F \in I, \bar{y}_F > 0) \end{cases}$$

DATA $\bar{y} \in Q$ **definisci:** $J^{=} = \left\{ e \in J : \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F = c_e \right\}$

$\bar{y}_A = 0$



$\bar{y}_B = 1$

$\bar{y}_C = 1$

$$c = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad J^{=} = \{1, 3\}$$

TROVA T **con le due proprietà seguenti:**

(1) $T : |T \cap F| \geq 1 \quad \forall F \in I \quad \Rightarrow$ T COVER

(2) $e \in T \Rightarrow \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F = c_e \quad \Rightarrow$ $\boxed{T \subseteq J^{=}}$

$\Rightarrow$ **TROVA un COVER contenuto in $J^{=}$**

PRIMALE RISTRETTO

Soluzione del Primale Ristretto: scelta di T

Ogni cover $T \subseteq J^{=}$ è una soluzione α-approssimata con:

$$\boxed{\alpha = \max |T \cap F| \ \ (F \in I, \bar{y}_F > 0)}$$

Trovarne uno o concludere che non ne esistono è **facile** (abbiamo un semplice **oracolo**)

$J^{=}$ è un **COVER ?** $\xrightarrow{SI}$ Trovato $\boxed{T = J^{=}}$

$J^{=}$ è un **COVER ?** $\xrightarrow{NO}$ Nessun $T \subset J^{=}$ è un **COVER**

Trovarne uno con $\max |T \cap F| = 1 \ (F \in I, \bar{y}_F > 0)$
è **difficile** (sarebbe ottimo per il set-covering)

Primale Duale Approssimato: Set-Covering

Se esistono $\bar{y} \in Q$ e $T : |T \cap F| \geq 1 \quad \forall F \in I$ tali che:

$e \in T \Rightarrow \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F = c_e \quad (e \in J)$

$$\begin{cases} T \quad \alpha\text{-approssimata} \\ \alpha = \max |T \cap F| \quad (F \in I, \bar{y}_F > 0) \end{cases}$$

IDEA: costruisci contemporaneamente $\bar{y} \in Q$ e T con un meccanismo Primale-Duale

DATA $\bar{y} \in Q$ definisci: $J^= = \left\{ e \in J : \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F = c_e \right\}$

SE : $|J^= \cap F| \geq 1 \quad \forall F \in I$

Primale Ristretto

$J^=$ α-approssimata

$\alpha = \max |J^= \cap F| \quad (F \in I, \bar{y}_F > 0)$

ALTRIMENTI:

$\exists \bar{F} : |J^= \cap \bar{F}| = 0$

Incrementa $\bar{y}_{\bar{F}}$

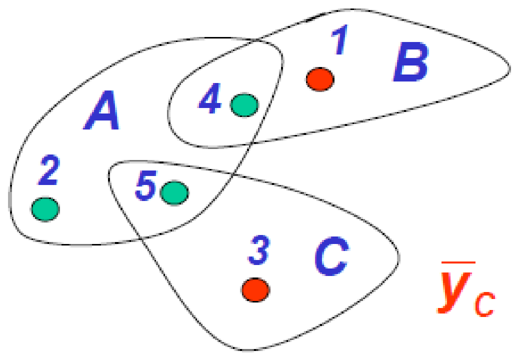
Come?

Primale Duale Approssimato (II): Set-Covering

$$\exists \bar{F} : \left| J^{=} \cap \bar{F} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_{\bar{F}} + \sum_{\substack{F: e \in F \\ F \neq \bar{F}}} \bar{y}_F < c_e \quad \forall e \in \bar{F}$$

$$c = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\bar{y}_A = 0$



$\bar{y}_B = 1$

$\bar{y}_C = 1$

$$\bar{y}_A + \bar{y}_C = 1 < c_5 = 2$$
$$\bar{y}_A + \bar{y}_B = 1 < c_4 = 2$$
$$\bar{y}_A = 0 < c_2 = 1$$

$$J^{=} = \{1, 3\}$$

$$\Delta(e, \bar{F}) = c_e - (\bar{y}_{\bar{F}} + \sum_{\substack{F: e \in F \\ F \neq \bar{F}}} \bar{y}_F) = c_e - \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F \quad \forall e \in \bar{F}$$

Nuova Soluzione

$$\bar{y}_{\bar{F}} := \bar{y}_{\bar{F}} + \min_{e \in \bar{F}} \Delta(e, \bar{F}) = \bar{y}_{\bar{F}} + \min_{e \in \bar{F}} (c_e - \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F)$$

$$J^{=} := J^{=} + \left\{ e \in \bar{F} : c_e = \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F \right\}$$

(almeno) un nuovo elemento in $J^{=}$

$$\bar{e} = \arg\min_{e \in \bar{F}} (c_e - \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F)$$

Primale Duale Approssimato (III): Set-Covering

$\exists \bar{F} : \left| J^{=} \cap \bar{F} \right| = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{y}_{\bar{F}} + \sum_{\substack{F:e\in F \\ F\neq \bar{F}}} \bar{y}_F < c_e \quad \forall e \in \bar{F}$

Nuova soluzione duale $\quad \bar{y}_{\bar{F}} := \bar{y}_{\bar{F}} + \min_{e\in\bar{F}} \left(c_e - \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F \right)$

$\Rightarrow$ **Cresce $J^{=}$**

ALGORITMO

DATA $\bar{y} \in Q$ **definisci:** $J^{=} = \left\{ e \in J : \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F = c_e \right\}$

SE : $\left| J^{=} \cap F \right| \geq 1 \quad \forall F \in I$

Primale Ristretto $\Rightarrow$ $J^{=}$ **α-approssimata**

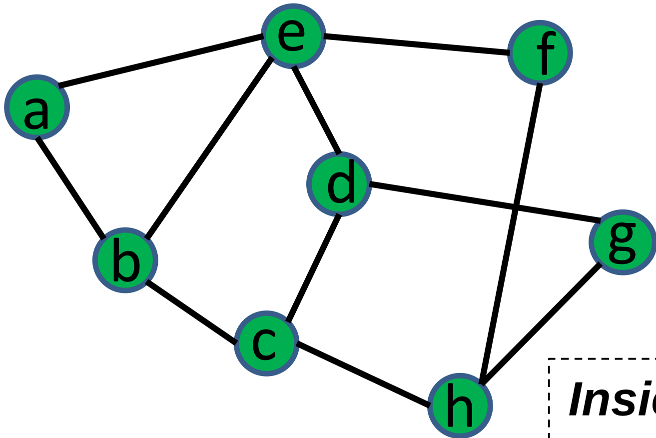
$$\alpha = \max \left| J^{=} \cap F \right| \quad (F \in I, \bar{y}_F > 0)$$

ALTRIMENTI:

$\exists \bar{F} : \left| J^{=} \cap \bar{F} \right| = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{y}_{\bar{F}} := \bar{y}_{\bar{F}} + \min_{e\in\bar{F}} \left(c_e - \sum_{F:e\in F} \bar{y}_F \right)$

Primale-Duale Approssimato: *Esempio* Node Cover

$G(V,E)$



Problema Node Cover (PL01)

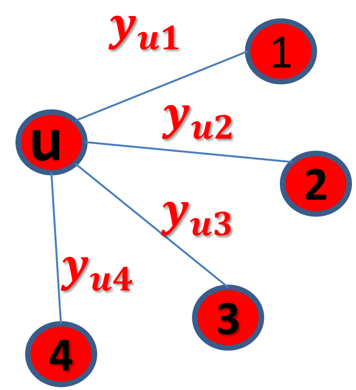
$$\min c^T x$$
$$\begin{cases} x_u + x_v \geq 1 & (uv \in E) \\ x_u \geq 0 & (u \in V) \\ x_u \in \{0,1\} & (u \in V) \end{cases}$$

Insieme di nodi minimo peso che «copre» le coppie di nodi estremi di ogni arco. Ovvero: l'insieme degli elementi è $J = V$; gli insiemi F da coprire sono le coppie $\{u,v\}$ con $uv \in E$

$$\max 1^T y$$
$$\begin{cases} \sum_{uv \in E} y_{uv} \leq c_u & (u \in V) \\ y_{uv} \geq 0 & (u \in V) \end{cases}$$

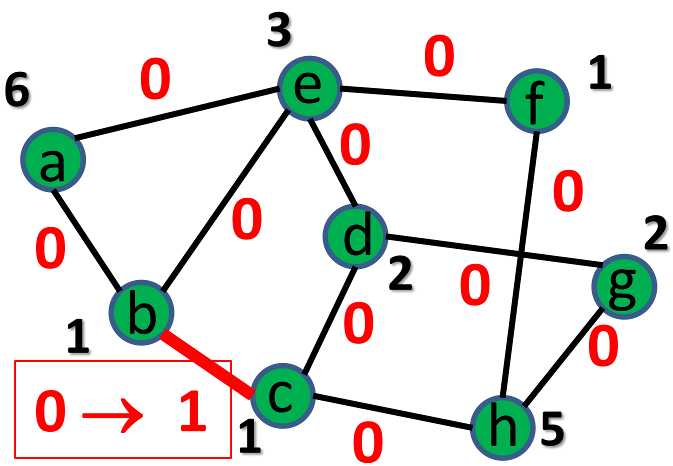
Duale del Rilassamento Lineare

Vincolo duale



$$y_{u1} + y_{u2} + y_{u3} + y_{u4} \leq c_u$$

Primale-Duale Approssimato: *Passo 1*



costi positivi → $\boxed{\bar{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}_{|E|}\ \text{ammissibile}}$

$\bar{\boldsymbol{y}}$ in **rosso** a fianco agli archi

$\boldsymbol{V}^{=} = \emptyset$

Scelgo un **arco** (coppia di nodi) che non interseca $\boldsymbol{V}^{=}$;
(si tratta dell'insieme $\bar{\boldsymbol{F}}$ visto nel caso generale):

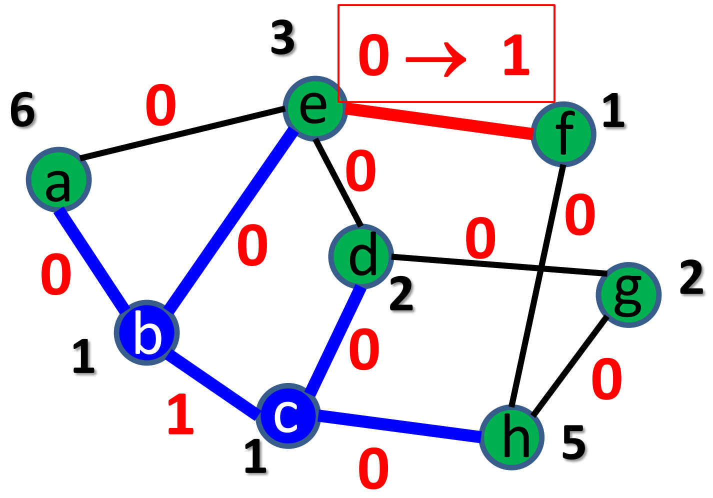
$$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\} \cap \boldsymbol{V}^{=} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{F}} = \{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$$

Aggiorno $\bar{\boldsymbol{y}}$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{bc}} := \bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{bc}} + \min\left\{\left(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{b}} - \sum_{\boldsymbol{bv}\in \boldsymbol{E}} \bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{bv}}\right) = \mathbf{1}, \left(\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{c}} - \sum_{\boldsymbol{cv}\in \boldsymbol{E}} \bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{cv}}\right) = \mathbf{1}\right\} = \mathbf{1}}$$

Aggiorno $\boldsymbol{V}^{=}$ $\quad \boxed{\boldsymbol{V}^{=} = \boldsymbol{V}^{=} \cup \{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}}$

Primale-Duale Approssimato: *Passo 2*



$\bar{y}$ in **rosso** a fianco agli archi

In ***blu*** nodi in $V^{=}$ e archi «coperti»

$$V^{=} = \{b, c\}$$

Scelgo un **arco** (coppia di nodi) che non interseca $V^{=}$;
(si tratta dell'insieme $\bar{F}$ visto nel caso generale):

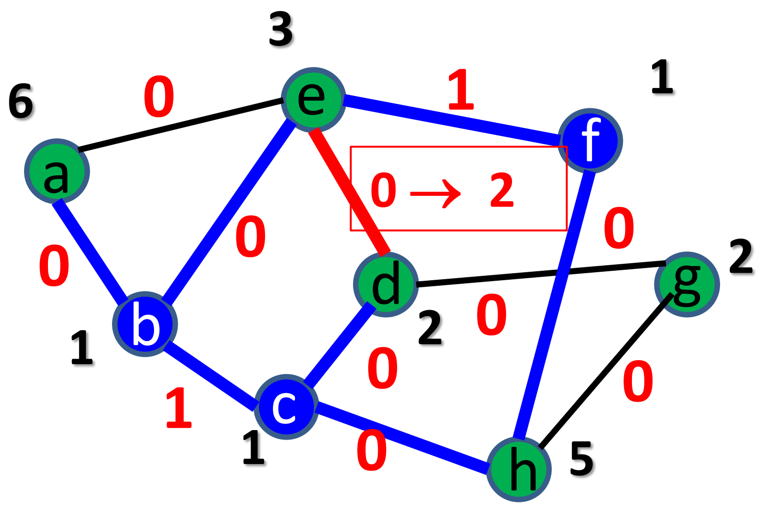
$$\{e, f\} \cap V^{=} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \bar{F} = \{e, f\}$$

Aggiorno $\bar{y}$

$$\boxed{\bar{y}_{ef} := \bar{y}_{ef} + \min\left\{\left(c_e - \sum_{ev \in E} \bar{y}_{ev}\right) = 3, \left(c_f - \sum_{fv \in E} \bar{y}_{fv}\right) = 1\right\} = 1}$$

Aggiorno $V^{=}$ $\quad \boxed{V^{=} = V^{=} \cup \{f\} = \{b, c, f\}}$

Primale-Duale Approssimato: Passo 3



$\overline{y}$ in **rosso** a fianco agli archi

In ***blu*** nodi in $V^{=}$ e archi «coperti»

$$V^{=} = \{b, c, f\}$$

Scelgo un **arco** (coppia di nodi) che non interseca $V^{=}$;
(si tratta dell'insieme $\overline{F}$ visto nel caso generale):

$$\{e, d\} \cap V^{=} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \overline{F} = \{e, d\}$$

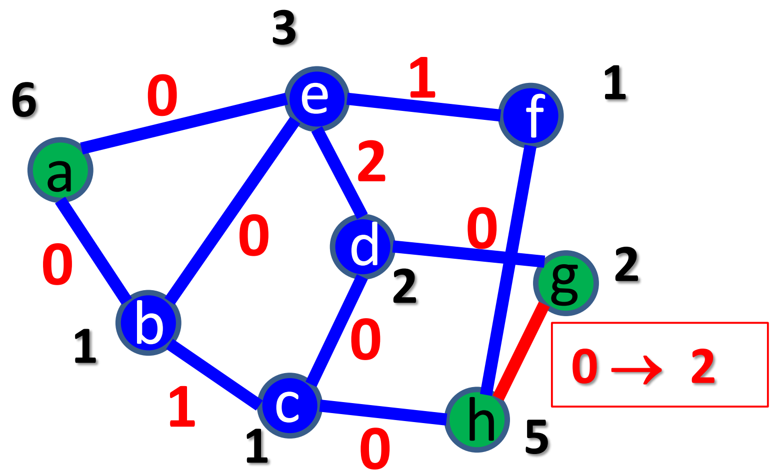
Aggiorno $\overline{y}$

$$\overline{y}_{ed} := \overline{y}_{ed} + \min\left\{\left(c_e - \sum_{ev \in E} \overline{y}_{ev}\right) = 2, \left(c_d - \sum_{dv \in E} \overline{y}_{dv}\right) = 2\right\} = 2$$

Aggiorno $V^{=}$

$$V^{=} = V^{=} \cup \{e, d\} = \{b, c, f, e, d\}$$

Primale-Duale Approssimato: *Passo 4*



$\bar{y}$ in **rosso** a fianco agli archi

In ***blu*** nodi in $V^{=}$ e archi «coperti»

$$V^{=} = \{b, c, f, e, d\}$$

Scelgo un **arco** (coppia di nodi) che non interseca $V^{=}$;
(si tratta dell'insieme $\bar{F}$ visto nel caso generale):

$$\{g, h\} \cap V^{=} = \emptyset \quad \rightarrow \qquad \bar{F} = \{g, h\}$$

Aggiorno $\bar{y}$

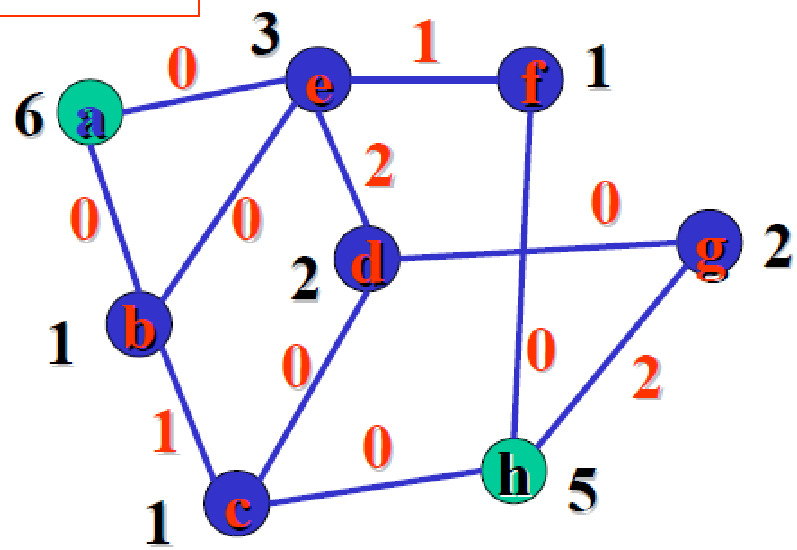
$$\boxed{\bar{y}_{gh} := \bar{y}_{gh} + \min\left\{\left(c_g - \sum_{gv \in E} \bar{y}_{gv}\right) = 2, \left(c_h - \sum_{hv \in E} \bar{y}_{hv}\right) = 5\right\} = 2}$$

Aggiorno $V^{=}$

$$\boxed{V^{=} = V^{=} \cup \{g\} = \{b, c, f, e, d, g\}}$$

Primale Duale Approssimato: Esempio (..)

Passo 5



$\bar{y}$ (in rosso a fianco agli archi)

$$V^{=} = \{b, c, d, e, f, g\}$$

$V^{=}$ è un "node cover"

$$\boxed{c(V^{=}) = 10}$$

$$\boxed{\alpha = \max_{(F \in I, \bar{y}_F > 0)} |V^{=} \cap F| = \max_{(uv \in E, \bar{y}_{uv} > 0)} |V^{=} \cap \{u, v\}| = 2}$$

$V^{=}$ è 2-approssimato

Ma questa è una specifica istanza! .. In generale?

Primale Duale Approssimato: Set-Covering

$$\bar{y} = 0_{|E|};\ J^{=} = \emptyset;\ T = \emptyset$$

SE : $|T \cap F| \geq 1 \quad \forall F \in I$ $\Rightarrow$ T α-approssimata

$$\alpha = \max |T \cap F| \quad (F \in I, \bar{y}_F > 0)$$

Primale Ristretto

ALTRIMENTI: $\exists \bar{F} : |J^{=} \cap \bar{F}| = 0$

$$\bar{y}_{\bar{F}} := \bar{y}_{\bar{F}} + \min_{e \in \bar{F}} (c_e - \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F)$$

$$J^{=} := \left\{ e \in J : \sum_{F: e \in F} \bar{y}_F = c_e \right\}$$

$$T := J^{=}$$

Algoritmo α-approssimato con:

$$\max_{(F \in I, \bar{y}_F > 0)} |V^{=} \cap F| \leq \alpha = \max |F| \quad F \text{ in qualche istanza } \pi$$

"Node Cover" $\rightarrow$ $\alpha = 2$ "Set Covering" $\rightarrow$ $\alpha = |J|$