Ottimizzazione Combinatoria 2

Rilassamento Lagrangiano e Metodo Subgradiente

Prof. **Antonio Sassano**

Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale "Antonio Ruberti"

Università di Roma "Sapienza"

A.A. 2016

Roma, Aprile 2011

Rilassamento Lagrangiano

Problema di ottimizzazione:

$$P: \quad z^* = \min\left\{ w^T x : Ax \geq b, x \in Q \subseteq R^n \right\} \quad A(m \times n)$$

Per ogni **un vettore di moltiplicatori (non negativi)** $u \geq 0_m$

R(u) è il Rilassamento Lagrangiano di (P):

$$R(u): \quad L(u) = \min\left\{ w^T x + u^T(b - Ax) : x \in Q \subseteq R^n \right\}$$

Esempio:

P

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 1 \end{aligned}\right\} Ax \geq b$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq 2 \\ 0 \leq x_2 &\leq 2 \end{aligned}\right\} x \in Q$$

$$u^T = (u_1, u_2)^T = (2,1)$$

$$u^T(b - Ax) = (2,1)\begin{pmatrix} 1 - 2x_1 - x_2 \\ 1 - x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = 3 - 5x_1 - 5x_2$$

$$\min 2x_1 + 3x_2 + (3 - 5x_1 - 5x_2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$3 + \min -3x_1 - 2x_2$$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

R(u)

Lower Bound Lagrangiano

$$P: \quad z^* = \min\left\{ w^T x : Ax \geq b, x \in Q \subseteq R^n \right\} \quad A(m \times n)$$

$$R(u): \quad L(u) = \min\left\{ w^T x + u^T (b - Ax) : x \in Q \subseteq R^n \right\}$$

Teorema: *(Lower bound Lagrangiano)*

Per ogni $u \geq 0_m$ *abbiamo* $L(u) \leq z^*$

Dim. $\bar{x}$ ottima per **R(u)** $\Rightarrow$ $L(u) = w^T \bar{x} + u^T (b - A\bar{x})$

$$x^* \text{ ottima per } P \Rightarrow \begin{cases} Ax^* \geq b \Rightarrow u^T (b - Ax^*) \leq 0 \\ \boxed{x^* \in Q} \end{cases}$$

x^* ammissibile per **R(u)**

$$L(u) = w^T \bar{x} + u^T (b - A\bar{x}) \leq w^T x^* + u^T (b - Ax^*) \leq w^T x^* = z^*$$

■

Duale Lagrangiano

$$P: \quad z^* = \min\{w^T x : Ax \geq b, x \in Q \subseteq R^n\} \quad A(m \times n)$$

$$R(u): \quad L(u) = \min\{w^T x + u^T(b - Ax) : x \in Q \subseteq R^n\}$$

$$x(u) = \operatorname{argmin}\{w^T x + u^T(b - Ax) : x \in Q \subseteq R^n\}$$

- *Il Rilassamento Lagrangiano si applica quando possono essere identificati dei **«vincoli difficili» Ax $\geq$ b***
- *Ad esempio i **vincoli di accoppiamento delle capacità** del problema **«multi-commodity flow»***
- *Le slack dei vincoli vengono inserite nella funzione obiettivo come **termine di penalità** (come nella Fase 1 del Simplesso)*
- ***L(u)** è un **lower bound** per ogni **u $\geq$ 0_m .. Il migliore?***

$$L^* = \max\{L(u) : u \in R^m_+\}$$

$$(DL): \quad L^* = \max_{u \in R^m_+} \min_{x \in Q}\{w^T x + u^T(b - Ax)\}$$

Problema Duale Lagrangiano

Esempio I: un problema di PL

P

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 &\geq 1 \end{aligned}\right\} Ax \geq b$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}\right\} x \in Q$$

$$u^T(b - Ax) = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} 1 - 2x_1 + x_2 \\ 1 + x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (u_1 + u_2) + (u_2 - 2u_1)x_1 + (u_1 - 3u_2)x_2$$

R(u)

$$L(u) = \min_x \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 + u^T(b - Ax) \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$L(u) = (u_1 + u_2) + \min_x \left\{ \begin{array}{c} (2 + u_2 - 2u_1)x_1 + (3 + u_1 - 3u_2)x_2 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$= k(u) + \min_x \left\{ \begin{array}{c} c_1x_1 + c_2x_2 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

- *Soluzione ottima di **R(u)***

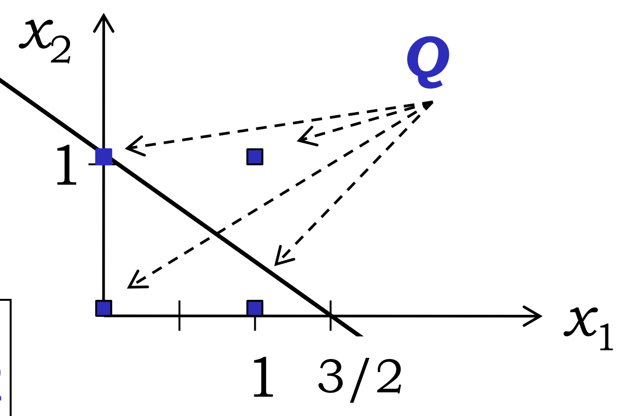
$$\boxed{\begin{cases} c_i \geq 0 \rightarrow x_i^* = 0 \\ c_i < 0 \rightarrow x_i^* = 2 \end{cases}}$$

Esempio II: *un problema di PL01*

$$P: \quad \max x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \in \{0,1\}$$

$$P: \quad \min -x_1 - 2x_2$$
$$-2x_1 - 3x_2 \ge -3$$
$$x \in Q$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



- *Soluzione ottima di **P***

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; z^* = -2$$

Rilassamento Lagrangiano R(u)

$$L(u) = \min\{-x_1 - 2x_2 + u(2x_1 + 3x_2 - 3), x \in Q\}$$

$$L(u) = -3u + \min\{(2u-1)x_1 + (3u-2)x_2, x \in Q\}$$

- *Soluzione ottima di **R(u)***

$$\begin{cases} 2u - 1 \ge 0 \to x_1(u) = 0; \ 3u - 2 \ge 0 \to x_2(u) = 0 \\ 2u - 1 < 0 \to x_1(u) = 1; \ 3u - 2 < 0 \to x_2(u) = 1 \end{cases}$$

Es: $u = \frac{1}{2}$ ➡ $x_1(u) = 0; x_2(u) = 1$ ➡ $x(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; L(u) = -3u - \frac{1}{2} = -2$

Discretizzazione del Rilassamento Lagrangiano

$$(P)\quad z^* = \min\left\{ w^T x : Ax \geq b, x \in Q, x \in \{0,1\}^n \right\}$$

$A(m \times n)$

$Q \subseteq R^n$ **poliedro**

$$\boxed{L(u) = \min_{x \in Q \cap \{0,1\}^n} \left\{ w^T x + u^T (b - Ax) \right\}}$$

$$(DL)\quad L^* = \max_{u \in R^m_+} L(u)$$

Studiamo l'andamento della funzione ***L(u)*** *al variare di* ***u***

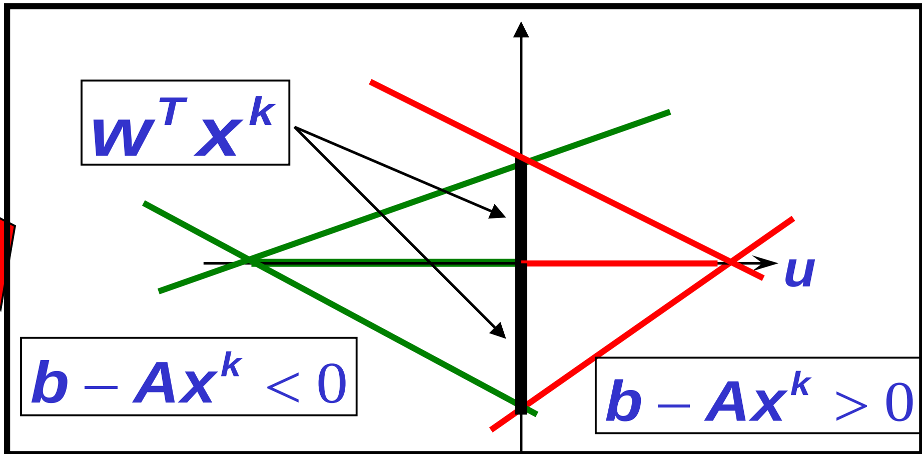
$$Q \cap \{0,1\}^n = \left\{ x^1, x^2, \ldots, x^p \right\}$$

$$L(u) = \min_{k=1,\ldots,p} \left\{ w^T x^k + u^T (b - Ax^k) \right\} = \min_{k=1,\ldots,p} \left\{ L^k(u) \right\}$$

$$L^k(u) = w^T x^k + u^T (b - Ax^k)$$

Iperpiano in R^{m+1}

..se ***u*** *è uno scalare*

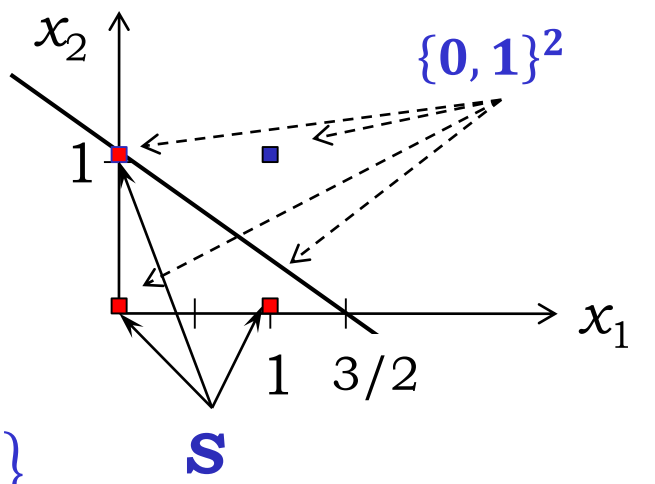


Discretizzazione di *L(u)*: Esempio II (cont.)

$$\max x_1 + 2x_2 \qquad\qquad \min \; -x_1 - 2x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 3 \qquad \equiv \qquad -2x_1 - 3x_2 \ge -3$$

$$x \in \{0,1\}^2 \;(Q = R^2) \qquad\qquad x \in \{0,1\}^2$$



$$\{0,1\}^2 = \left\{x^1 = \binom{0}{0}, x^2 = \binom{1}{0}, x^3 = \binom{0}{1}, x^4 = \binom{1}{1}\right\}$$

$$L(u) = -3u + min\left\{(2u-1)x_1 + (3u-2)x_2, x \in \{0,1\}^2\right\}$$

$$L(u) = \min_{k=1,\dots,4}\left\{L^k(u)\right\}$$

$$L^k(u) = w^T x^k + u^T(b - Ax^k)$$

$$x^1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow L^1(u) = -3u \qquad x^3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow L^3(u) = -2$$

$$x^2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow L^2(u) = -u - 1 \qquad x^4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rightarrow L^4(u) = 2u - 3$$

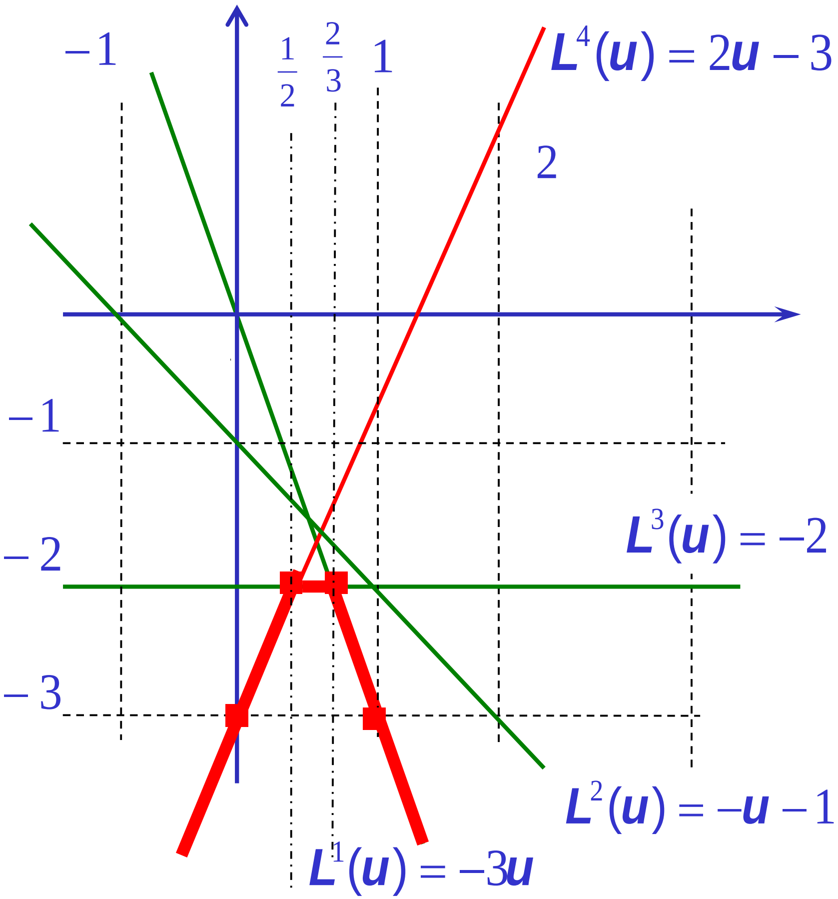
Discretizzazione di $L(u)$: Esempio II (cont.)

$$x^1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow L^1(u) = -3u \qquad x^3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rightarrow L^3(u) = -2$$

$$x^2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow L^2(u) = -u-1 \qquad x^4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rightarrow L^4(u) = 2u-3$$

$$L^k(u) = w^T x^k + u^T(b - Ax^k)$$

$$L(u) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(u)\}$$



$$L^4(0) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(0)\} = -3$$

$$L^4(1/2) = L^3(1/2) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(1/2)\} = -2$$

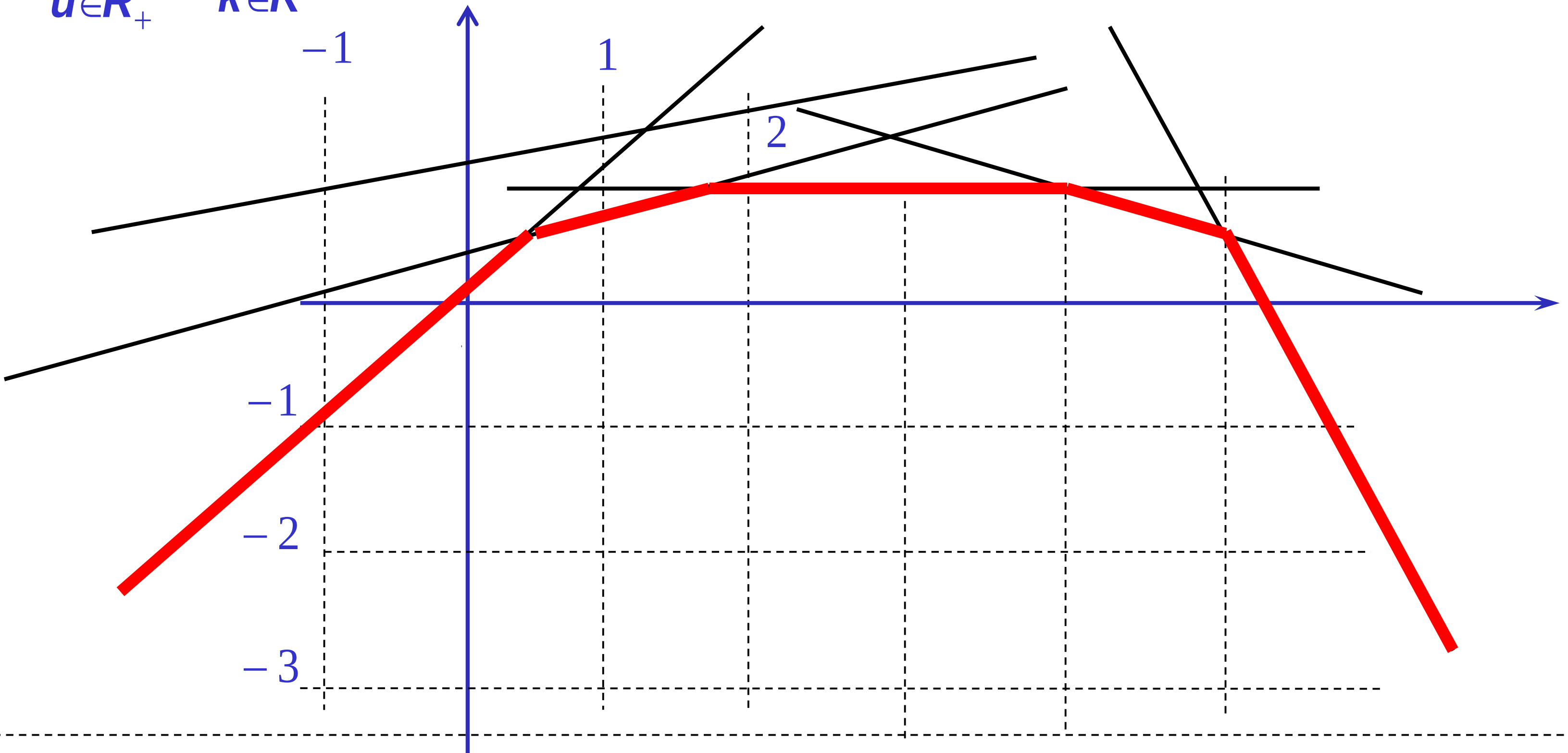
$$L^1(2/3) = L^3(2/3) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(2/3)\} = -2$$

$$L^1(1) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(1)\} = -3$$

$$(DL): \quad L^* = \max_{u\in R^m_+} \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(u)\} = -2$$

Andamento della funzione lagrangiana

$$L^* = \max_{u \in R_+^m} \min_{k \in K} \left\{ L^k(u) \right\} \qquad K = 1,\ldots,p$$



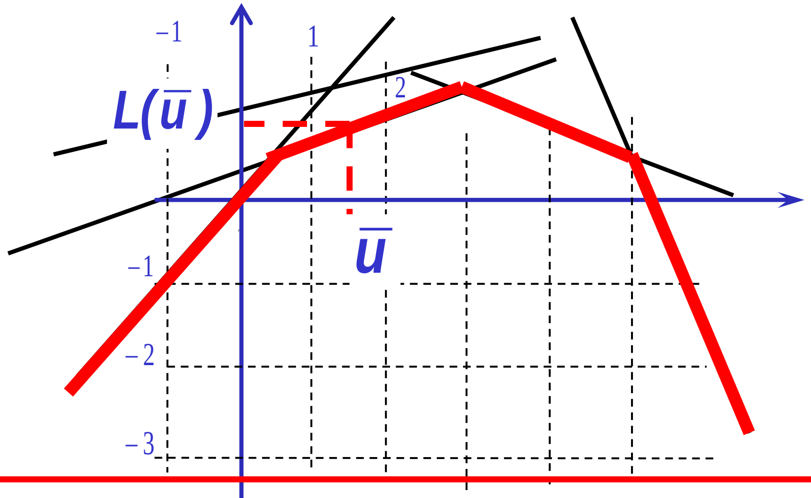
Per ogni $u \geq 0_m, L(u) = \min_{k \in K} L^k(u)$ è ottenuto sugli iperpiani *"più bassi"* (rette nel caso u sia uno scalare), ovvero quelli per i quali $L^k(u) = L(u)$. Tali piani sono detti ***iperpiani di supporto*** in u.

$L(u): R^m \to R$ è una funzione ***concava lineare a tratti***

Formulazione PL del Duale Lagrangiano

fissato $\bar{u} \in R^m_+$

$$L(\bar{u}) = \min \begin{cases} w^T x^1 + \bar{u}^T (b - A x^1) \\ \dots \\ w^T x^p + \bar{u}^T (b - A x^p) \end{cases}$$



$$\boxed{L(\bar{u}) = \max \{ v \in R: \; v \le w^T x^k + \bar{u}^T (b - A x^k) \quad k \in K \}}$$

per ogni fissato $u \in R^m_+$

$$\boxed{L(u) = \max \{ v: \; v \le w^T x^k + u^T (b - A x^k) \quad k \in K \}}$$

al variare di $v \in R$ e $u \in R^m_+$

$$\boxed{L^* = \max_{u \in R^m_+} L(u) =}$$

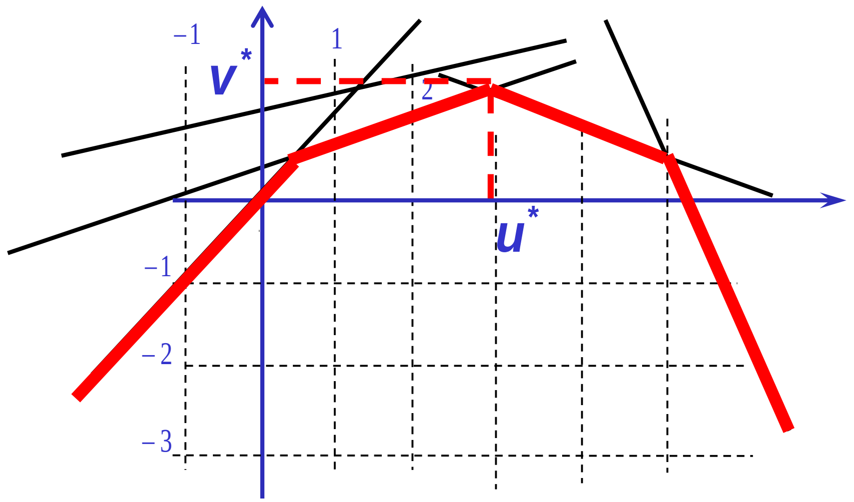
$$\boxed{= \max_{u \in R^m_+} \{ v: \; v \le w^T x^k + u^T (b - A x^k) \quad k \in K \}}$$

Formulazione PL del Duale Lagrangiano

$$L^* = \max_{u \in R^m_+} L(u) =$$

$$= \max_{v \in R, u \in R^m_+} \{v:\ v \leq w^T x^k + u^T(b - Ax^k)\ \ k \in K\}$$

$$L^* = L(u^*) = v^* = \max_{u \in R^m_+ v \in R} \left\{ v : \begin{array}{l} v \leq w^T x^1 + u^T(b - Ax^1) \\ \quad .... \\ v \leq w^T x^p + u^T(b - Ax^p) \end{array} \right\}$$



Problema **“difficile”** di PL (troppi vincoli!)

Usiamo le idee del **Metodo del Simplesso Dinamico**

Metodo del "cutting plane" *(simplesso dinamico)*

A. Risolviamo un **Problema Ridotto** («Core»)
B. Verifichiamo l'ammissibilità con un **Oracolo**

Problema Ridotto («Core»):

Risolvi per un sottoinsieme di «iperpiani» $B \subset K = \{1, \dots, p\}$

$$L_B(u) = max\ \{v:\ \ v \leq w^T x^k + u^T\left(b - Ax^k\right)\ \ k \in B\}$$

Poiché $B \subset K$, la *soluzione ottima del problema ridotto* $(v(B), u(B))$ produce un **Upper Bound** per la soluzione ottima:

$$L_B\big(u(B)\big) = v(B) \geq L^* = v^* \geq L(u(B))$$

Se $(v(B), u(B))$ **è ammissibile** per il problema completo ($v(B) = L\big(u(B)\big)$) allora $v(B) = L^*$. Infatti:

$$L_B\big(u(B)\big) = v(B) = L\big(u(B)\big) = \ max\ \{v:\ \ v \leq$$
$$\leq w^T x^k + u(B)^T\left(b - Ax^k\right)\ \ k \in K\}$$

Metodo del "cutting plane" *(simplesso dinamico)*

A. Risolviamo un **Problema Ridotto** («Core»)
B. Verifichiamo l'ammissibilità con un **Oracolo**

Oracolo:

Se $(v(B), u(B))$ **è ammissibile** per il problema completo

$$\{v(B) \leq w^T x^k + u(B)^T (b - Ax^k) \quad \forall k \in K\}$$

Ovvero se $v(B) = L(u(B)) = \max \{v: \ v \leq$
$\leq w^T x^k + u(B)^T (b - Ax^k) \quad k \in K\}$

$\Rightarrow$ $(v(B), u(B))$ **Ottimo** $\Rightarrow$ $v(B) = L^*$

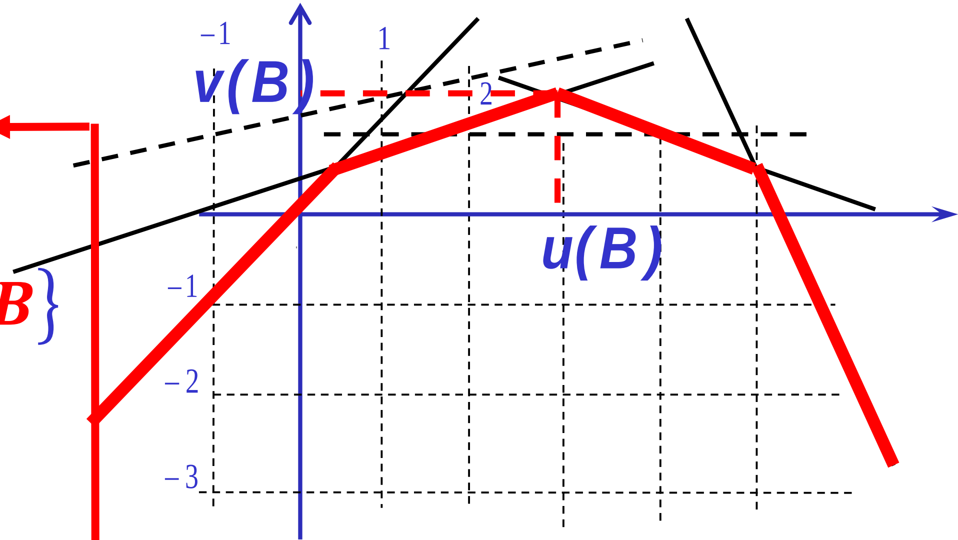
Se $(v(B), u(B))$ **NON è ammissibile** per il problema completo (ovvero $v(B) > L(u(B))$) $\rightarrow$ **esiste** (iperpiano) $\bar{k}$ tale che:

$$v(B) > w^T x^{\bar{k}} + u(B)^T (b - Ax^{\bar{k}}) = L(u(B))$$

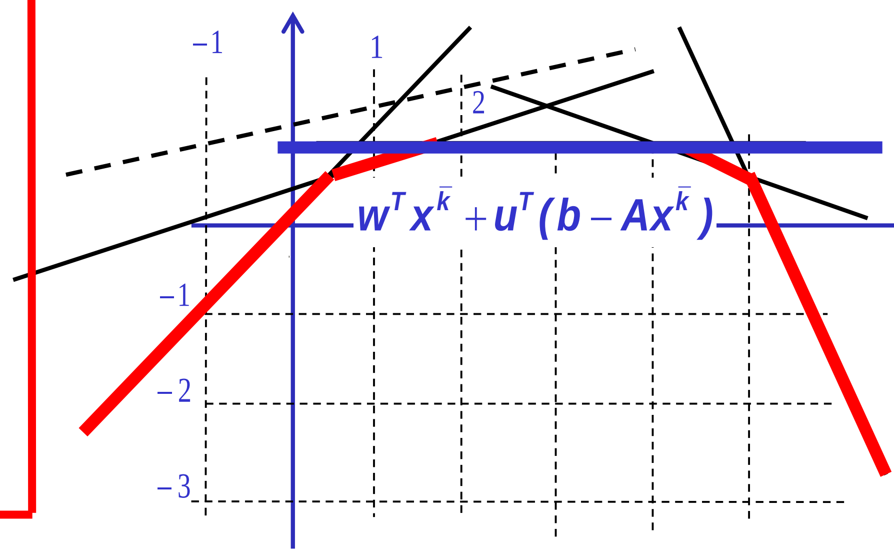
Metodo del "cutting plane" *(diagramma di flusso)*

- **Scegli** **un sottoinsieme** $B \subset K$

- **Risolvi** *problema* ***ridotto*** *di PL*
  $v(B) = L_B(u(B)) = \max\{v:\ v \le w^T x^k + u(B)^T(b - Ax^k)\ \ k \in B\}$
  soluzione ottima $(v(B), u(B))$



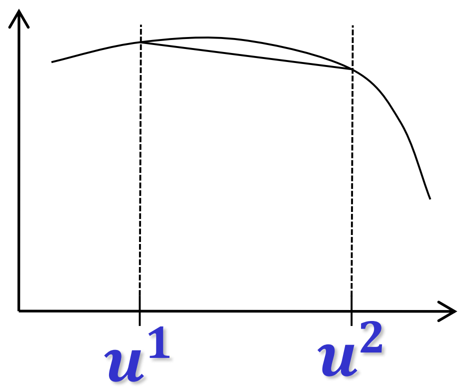
- **Calcola** *(oracolo)*
  $L(u(B)) = \max\{v:\ v \le w^T x^k + u(B)^T(b - Ax^k)\ \ k \in K\} =$
  $= w^T x^{\bar{k}} + u(B)^T(b - Ax^{\bar{k}})$



- **Se** $v(B) = L(u(B)) \rightarrow \boxed{(v(B), u(B))\ \textit{ottima}}$

- **Altrimenti** $B := B \cup \{\bar{k}\}$

Proprietà delle funzioni concave

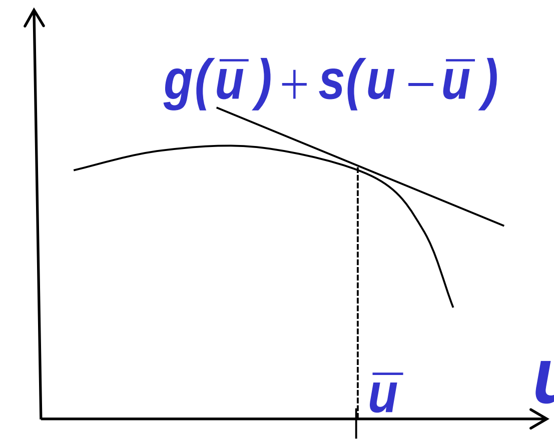


Def. Funzione $g(u): R^m \to R$ **CONCAVA** *se e solo se per ogni* $u^1, u^2 \in R^m$ e ogni $0 \le \alpha \le 1$ *abbiamo:*

$$g(\alpha u^1 + (1-\alpha)u^2) \ge \alpha g(u^1) + (1-\alpha) g(u^2)$$

Teorema. *Una funzione* $g(u): R^m \to R$ è concava *se e solo se per ogni* $\bar{u} \in R^m$ esiste $s \in R^m$ *tale che:*

$$g(\bar{u}) + s^T(u-\bar{u}) \ge g(u) \quad \forall u \in R^m$$

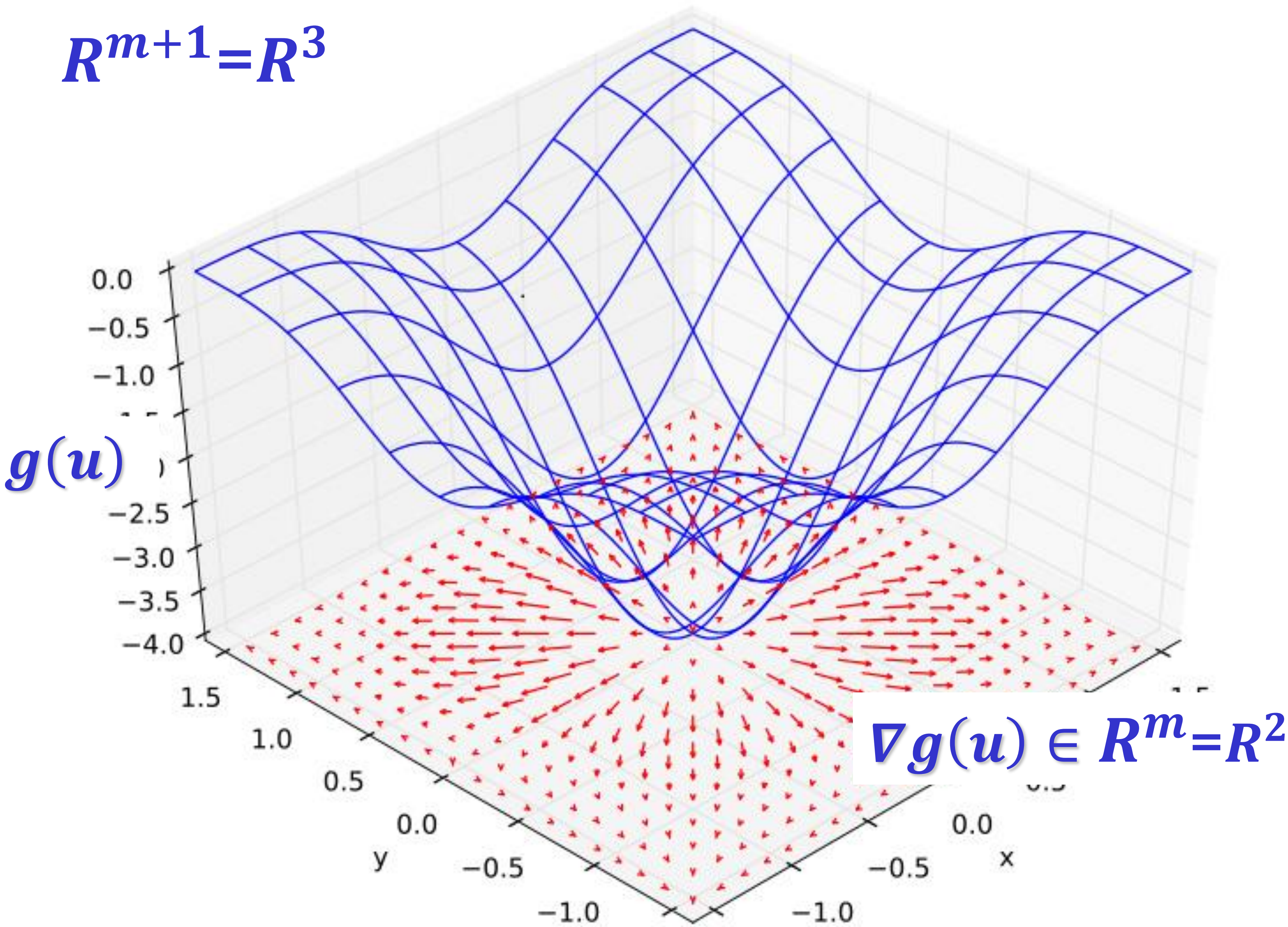


- *Se* g *è differenziabile in* $\bar{u} \in R^m \to$
  $s \in R^m$ è **unico** ed è il **gradiente** di $g(u)$ *in* $\bar{u}$:

$$\boxed{s = \nabla g(\bar{u}) = (\partial g(\bar{u})/\partial u_1,\dots,\ \partial g(\bar{u})/\partial u_m)^T}$$

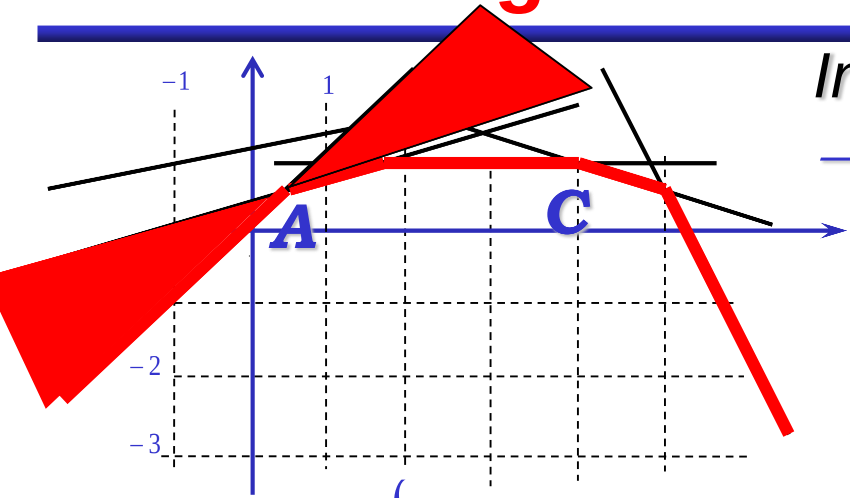
*"il grafico della funzione giace **al di sotto** della tangente in ogni punto"*

- $\nabla g(\bar{u}) \in R^m$: direzione di ***massimo incremento*** di g *in* $\bar{u}$



$R^{m+1}=R^3$
$g(u)$
$\nabla g(u) \in R^m=R^2$
0.0
−0.5
−1.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
x

Subgradienti, subdifferenziali



In A *e* C $g(u)$ *non è differenziabile*

$\rightarrow$ *infiniti vettori* $s \in R^m$ *tali che:*

$$g(\bar{u}) + s^T(u - \bar{u}) \geq g(u) \quad \forall u \in R^m$$

$s \in R^m$ **SUBGRADIENTE** *di* g in $\bar{u}$

$$\partial g(\bar{u}) = \{ s \in R^m : s \text{ è un subgradiente di } g \text{ in } \bar{u} \}$$

SUBDIFFERENZIALE di g in u

Il problema (vincolato) $\max \quad g(u) : u \geq 0_m$ *può essere risolto con*

- **METODO DEL SUBGRADIENTE** che costruisce una sequenza:

$$u^{t+1} = Proj_{R^m_+}(u^t + \theta^t s^t) = \max(0_m, u^t + \theta^t s^t) \quad s^t \in \partial g(u^t)$$

Il nuovo punto u^{t+1} *è ottenuto* ***proiettando*** *sull'ortante positivo* R^m_+ *il punto* $u^t + \theta^t s^t$ *ottenuto muovendosi da* u^t *nella direzione del subgradiente (di* ***massimo incremento*** *in* u^t*)*

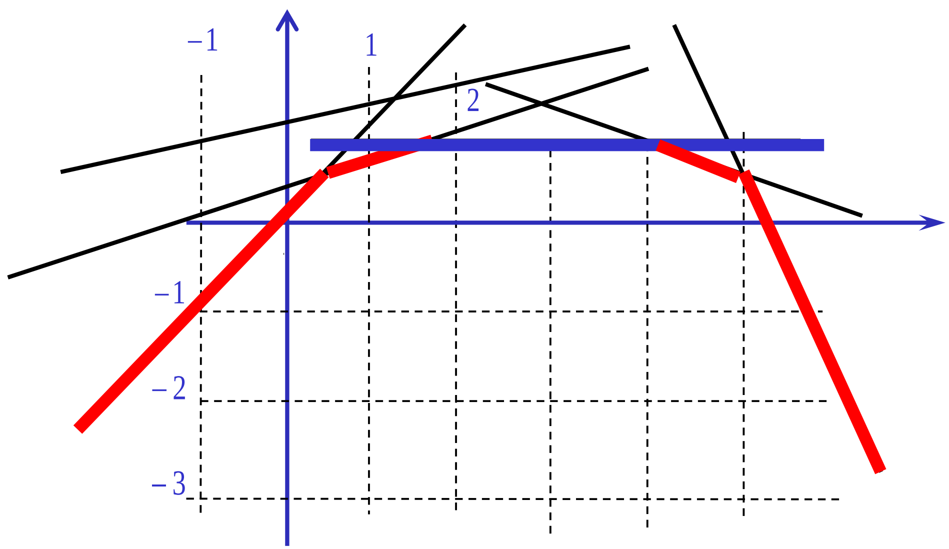
Criterio di arresto (caso non vincolato)

Teorema *Se* $\boldsymbol{g}$ *è una funzione concava in* $\boldsymbol{R}^m$*,* $\boldsymbol{u^*}$ *è una soluzione ottima per il problema* $\boldsymbol{max}\ \{g(u) : u \in R^m\}$ *se e solo se* $0_m \in \partial g(u^*)$

Dim. $0_m \in \partial g(u^*) \Leftrightarrow g(u^*) + 0_m^T(u - u^*) \geq g(u) \quad \forall u \in R^m$

$$\Leftrightarrow g(u^*) \geq g(u) \quad \forall u \in R^m$$

■



Condizione soddisfatta **se esiste un iperpiano di supporto in** $\boldsymbol{u^*}$ ***"parallelo"*** **al sottospazio** $\boldsymbol{R^m}$**. Euristicamente, anche un *iperpiano di supporto*** $\boldsymbol{\varepsilon \in \partial g(u^*)}$ **("*quasi parallelo*") va bene!**

Subgradienti del *Duale Lagrangiano*

TEOREMA: Il *subdifferenziale* della funzione $L(u)$ nel punto $\bar{u}$ soddisfa la relazione:

$$\boxed{\partial L(\bar{u}) \supseteq \left\{b - Ax^k:\ w^T x^k + \bar{u}^T\left(b - Ax^k\right) = L(\bar{u}), k \in K\right\}}$$

DIM. Dobbiamo dimostrare che *per ogni* $k \in K$ *tale che* $w^T x^k + \bar{u}^T\left(b - Ax^k\right) = L(\bar{u})$, *il vettore* $b - Ax^k$ *è un* ***subgradiente di*** $L(u)$ *in* $\bar{u}$. *Ovvero che per ogni* $u \geq 0_m$*:*

$$\boxed{L(\bar{u}) + \left(b - Ax^k\right)^T (u - \bar{u}) \geq L(u)}$$

Poiché $w^T x^k + \bar{u}^T\left(b - Ax^k\right) = L(\bar{u})$, *abbiamo che:*

$$L(\bar{u}) + \left(b - Ax^k\right)^T (u - \bar{u}) =$$

$$= w^T x^k + \bar{u}^T\left(b - Ax^k\right) + \left(b - Ax^k\right)^T (u - \bar{u}) =$$

$$= w^T x^k + u^T\left(b - Ax^k\right) = L^k(u) \geq \min_{k \in K}\left\{L^k(u)\right\} = L(u) \qquad \blacksquare$$

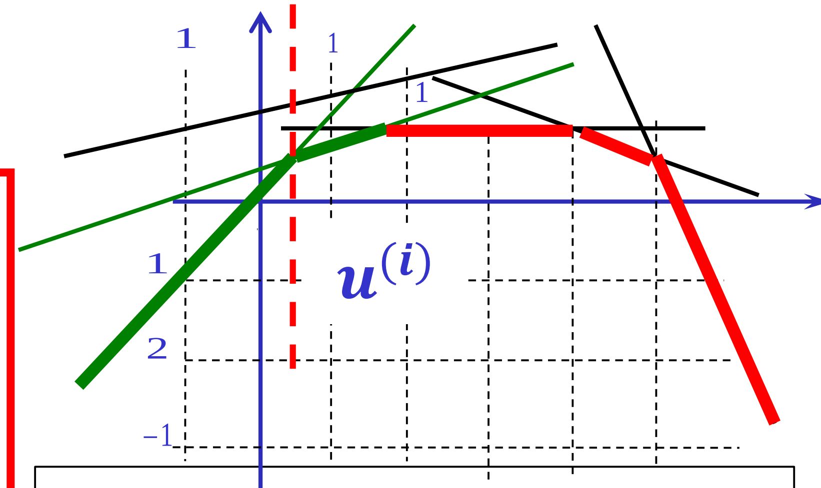
OSS. Le componenti positive di $b - Ax^k$ rappresentano **violazioni** del vincolo corrispondente da parte di x^k

Subgradiente applicato al Duale Lagrangiano (I)

- ***Scegli*** $\boldsymbol{\theta^{(0)}, u^{(0)}}$ e ***Poni*** $\boldsymbol{i := 0}$
- ***Trova*** $\boldsymbol{L(u^{(i)}) = \min_{k \in K} L^k\,(u^{(i)})}$

  $\boldsymbol{= w^T x^{\bar{k}} + \left(b - A x^{\bar{k}}\right)^T u^{(i)} \quad \bar{k} \in K}$
- ***Definisci*** $\boldsymbol{u^{(i+1)} \in R_+^m}$

  $\boldsymbol{u^{(i+1)} = \max(0_m, u^{(i)} + \theta^{(i)}\, s)}$
- ***Calcola*** $\boldsymbol{\theta^{(i+1)}}$
- $\boldsymbol{i := i + 1}$



Subgradiente?

$\boldsymbol{s = b - A x^k}$ per un qualsiasi iperpiano $\boldsymbol{k}$:

$\boldsymbol{w^T x^k + \left(b - A x^k\right)^T u^{(i)} =}$

$\boldsymbol{= L\left(u^{(i)}\right)}$

Ovvero: *un iperpiano con valore* $\boldsymbol{L\left(u^{(i)}\right)}$ *nel punto* $\boldsymbol{u^{(i)}}$ (*Teorema precedente*)

- **Quando ci fermiamo?**
- **Come scegliamo** $\boldsymbol{\theta^{(i+1)}}$ **?**

Scelta di $\theta^{(i)}$ e criterio di arresto

1. **Serie Divergente**

$\sum_{i=1}^{\infty} \theta^{(i)} = \infty, \ \lim_{i\to\infty} \theta^{(i)} = 0$ esempio: $\theta^{(i)} = \frac{R}{i}$ o $\frac{R}{\sqrt{i+1}}$

2. **Serie con "target" (upper bound $\bar{L} \geq L^*$)**

$$\theta^{(i)} = \rho^i \frac{(L(u^{(i)}) - \bar{L})}{\|b - Ax^k\|}, \qquad 0 < \rho^i < 2$$

3. **… quello che si usa sempre**

$$\theta^{(i+1)} = \frac{\theta^{(i)}}{2}$$ **STOP** se $\theta^{(i+1)} < \varepsilon$

Subgradiente applicato al Duale Lagrangiano (II)

- ***Scegli*** $\varepsilon, \theta^{(0)}, u^{(0)}$ e ***Poni*** $i := 0, \; L^{Best} := -\infty$.

PASSO i

- ***Trova*** $L(u^{(i)}) = \min_{k \epsilon K} L^k (u^{(i)})$

$$= w^T x^{\bar{k}} + \left(b - A x^{\bar{k}}\right)^T u^{(i)} \quad \bar{k} \in K$$

- ***Se*** $L^{Best} < L\left(u^{(i)}\right) \rightarrow L^{Best} := L\left(u^{(i)}\right); \; u^{Best} := u^{(i)}$
- ***Definisci*** $u^{(i+1)} \in R_+^m$

$$u^{(i+1)} = \max(0_m, u^{(i)} + \theta^{(i)} (b - A x^k))$$

- $\theta^{(i+1)} = \frac{\theta^{(i)}}{2}$
- **Se** $\theta^{(i+1)} < \varepsilon$ ***or*** $b - A x^k = 0_m \rightarrow u^{Best}$ *soluzione migliore (euristica)*
- ***Altrimenti:*** $i := i + 1$

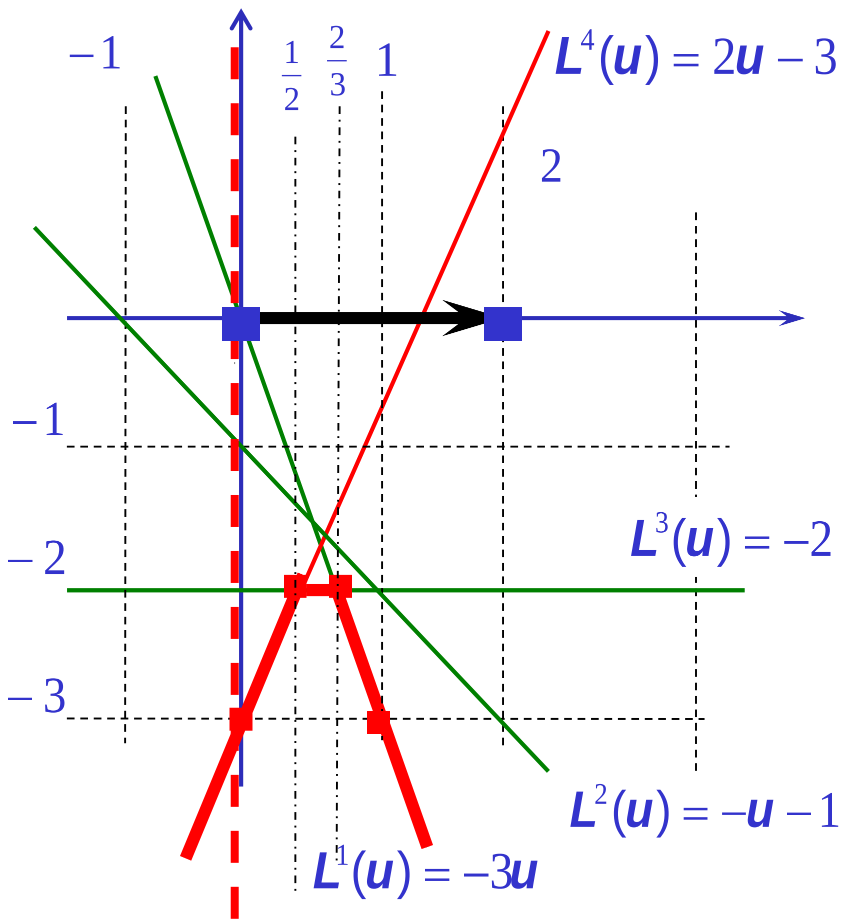
Metodo del Subgradiente: Esempio II (cont.)

$$x^1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to L^1(u) = -3u \qquad x^3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to L^3(u) = -2$$

$$x^2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to L^2(u) = -u-1 \qquad x^4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to L^4(u) = 2u-3$$

$$L^k(u) = w^T x^k + u^T(b - Ax^k)$$

$$L(u) = \min_{k=1,\dots,4}\{L^k(u)\}$$



Inizializzazione:

$$\boxed{u^{(0)} = 0, L^{Best} := -\infty, \theta^{(0)} := 1, \epsilon = 1/32}$$

Passo 0 ($u^{(0)} = 0$)**:**

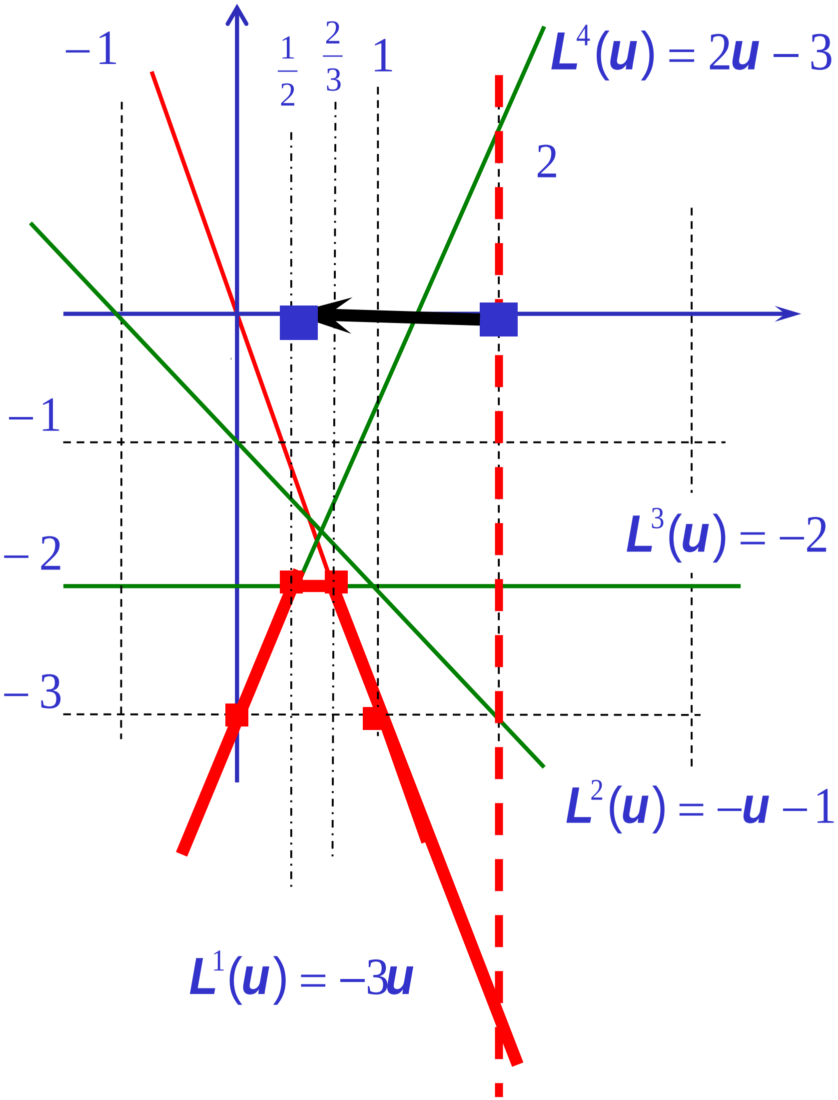
- ✓ **Calcolo** $L(0)$ $\min_{k=1,\dots,4}\{L^k(0)\} = -3$
- ✓ **Aggiorno**: $L^{Best} := -3, u^{Best} := 0$
- ✓ **Possibile subgradiente**

  $\partial L(u^{(0)}) \supseteq \{b - Ax^4\} = \{2\}$

  coefficiente di u *in* $L^4(u)$
- ✓ **Scelgo un subgradiente** $s = 2$
- ✓ **Aggiorno** u

  $$u^{(1)} = u^{(0)} + \theta^{(0)} s = 0 + 2 = 2$$
- ✓ **Aggiorno** $\theta^{(1)} = \dfrac{\theta^{(0)}}{2} = \dfrac{1}{2} > \varepsilon = \dfrac{1}{32}$

Metodo del Subgradiente: Esempio II (cont.)



Passo 1 $\left(u^{(1)} = 2,\ \theta^{(1)} = \frac{1}{2}\right)$

✓ ***Calcolo*** $L(2)$

$$\min_{k=1,\dots,4} \left\{ L^k(2) \right\} = -6$$

✓ ***NON Aggiorno*** L^{Best}

✓ ***Possibili subgradienti***

$$\partial L\left(u^{(1)}\right) \supseteq \left\{ b - Ax^1 \right\} = \{-3\}$$

coefficiente di u *in* $L^1(u)$

✓ ***Scelgo un subgradiente***

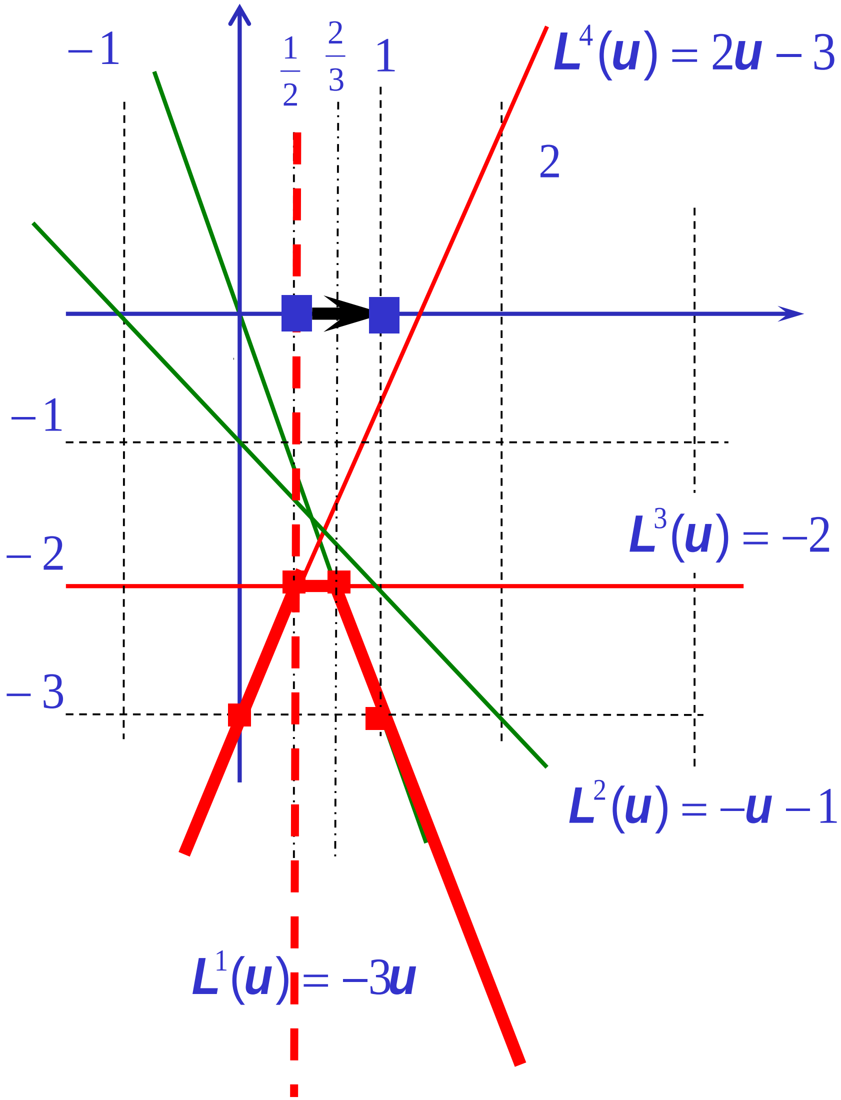
$$s = -3$$

✓ ***Aggiorno*** u

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \theta^{(1)} s = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

✓ ***Aggiorno*** $\theta^{(2)} = \frac{\theta^{(1)}}{2} = \frac{1}{4} > \varepsilon = \frac{1}{32}$

Metodo del Subgradiente: Esempio II (cont.)



Passo 2 $\left(u^{(2)} = 1/2,\ \theta^{(2)} = \frac{1}{4}\right)$

✓ ***Calcolo*** $L(1/2)$

$$\min_{k=1,\ldots,4} \{L^k(1/2)\} = -2$$

✓ ***Aggiorno***: $L^{Best} := -2, u^{Best} := \frac{1}{2}$

✓ ***Possibili subgradienti***

$$\partial L(u^{(2)}) \supseteq \{b - Ax^4, b - Ax^3\} = \{2,0\}$$

coefficienti di u *in* $L^4(u)$ e $L^3(u)$

✓ ***Scelgo un subgradiente***

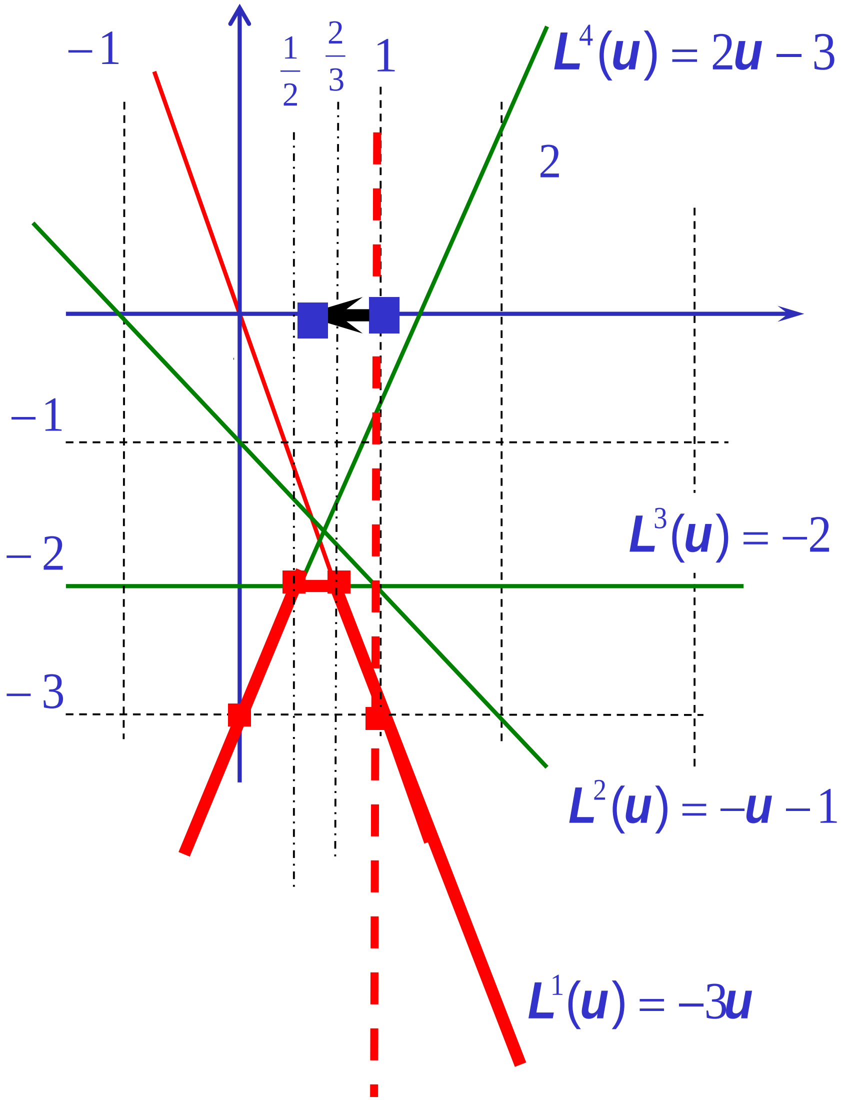
$s = 2$ (*e se sceglievamo* 0?)

✓ ***Aggiorno*** u

$$u^{(3)} = u^{(2)} + \theta^{(2)} s = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

✓ ***Aggiorno*** $\theta^{(3)} = \frac{\theta^{(2)}}{2} = \frac{1}{8} > \varepsilon = \frac{1}{32}$

Metodo del Subgradiente: Esempio II (cont.)



Passo 3 $\left(u^{(3)} = 1,\ \theta^{(3)} = \frac{1}{8}\right)$

✓ ***Calcolo*** $L(1)$

$$\min_{k=1,\dots,4} \left\{L^k(1)\right\} = -3$$

✓ ***NON Aggiorno*** L^{Best}

✓ ***Possibili subgradienti***

$$\partial L\left(u^{(3)}\right) \supseteq \left\{b - Ax^1\right\} = \{-3\}$$

coefficiente di u *in* $L^1(u)$

✓ ***Scelgo un subgradiente***

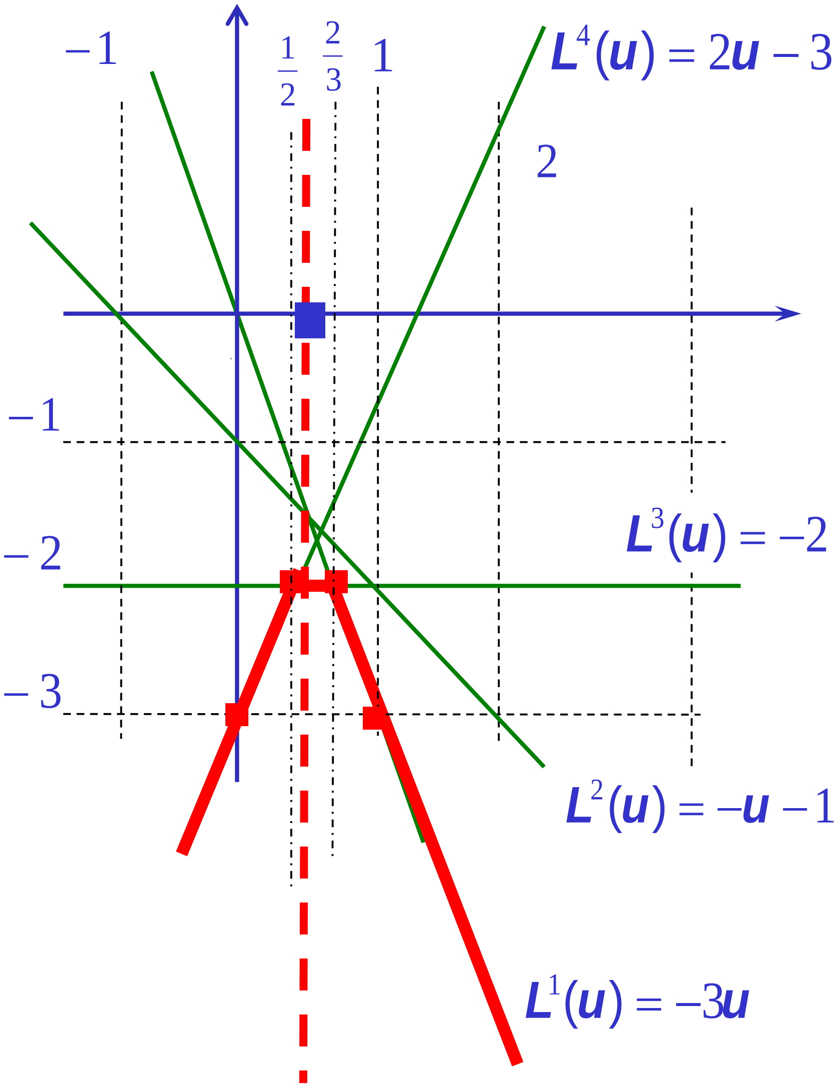
$$s = -3$$

✓ ***Aggiorno*** u

$$u^{(4)} = u^{(3)} + \theta^{(3)} s = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

✓ ***Aggiorno*** $\theta^{(4)} = \frac{\theta^{(3)}}{2} = \frac{1}{16} > \varepsilon = \frac{1}{32}$

Metodo del Subgradiente: Esempio II (cont.)



Passo 4 $\left(u^{(4)} = 5/8,\ \theta^{(4)} = \frac{1}{16}\right)$

✓ ***Calcolo*** $L(5/8)$

$$\min_{k=1,\dots,4}\left\{L^k(5/8)\right\} = -2$$

✓ ***Possibili subgradienti***

$$\partial L\left(u^{(4)}\right) \supseteq \left\{b - Ax^3\right\} = \{0\}$$

Coefficiente di u *in* $L^3(u)$

✓ ***Scelgo un subgradiente***

$$s = 0$$

✓ ***Aggiorno*** u

$$u^{(5)} = u^{(4)} + \theta^{(4)} s = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} = u^{(4)}$$

✓ ***Aggiorno*** θ

$$\theta^{(5)} = \frac{\theta^{(4)}}{2} = \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

✓ ***STOP*** *(anche* $0 \in \partial L\left(u^{(4)}\right)$*)*: $u^{Best} := \frac{1}{2}$ ***soluzione (euristica)***