Ottimizzazione Combinatoria 2

Metodo del Simplesso Dinamico

ANTONIO SASSANO

Università di Roma "La Sapienza"
Dipartimento di Informatica, Automatica e Gestionale
«Antonio Ruberti»

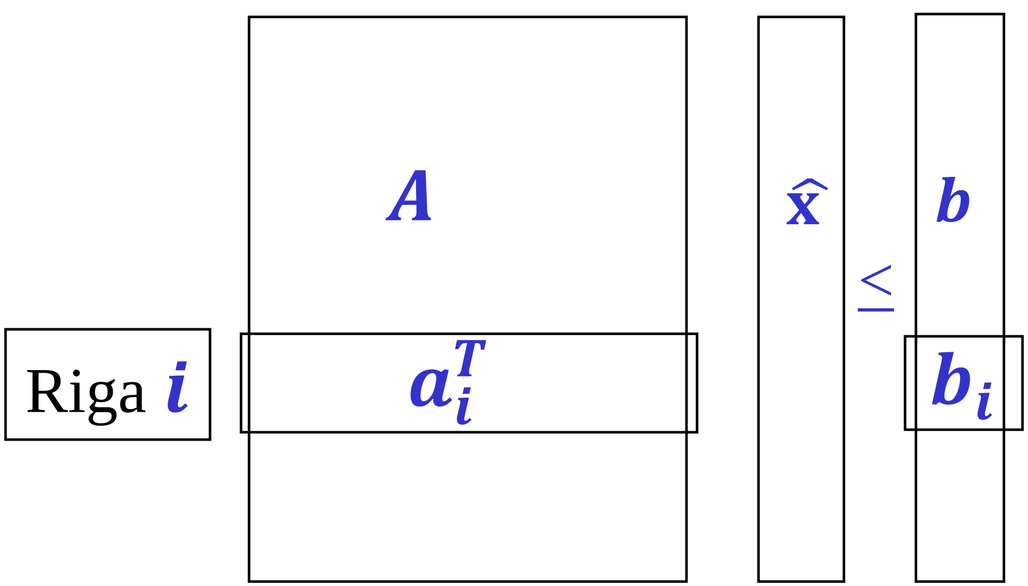
Oracolo di Separazione

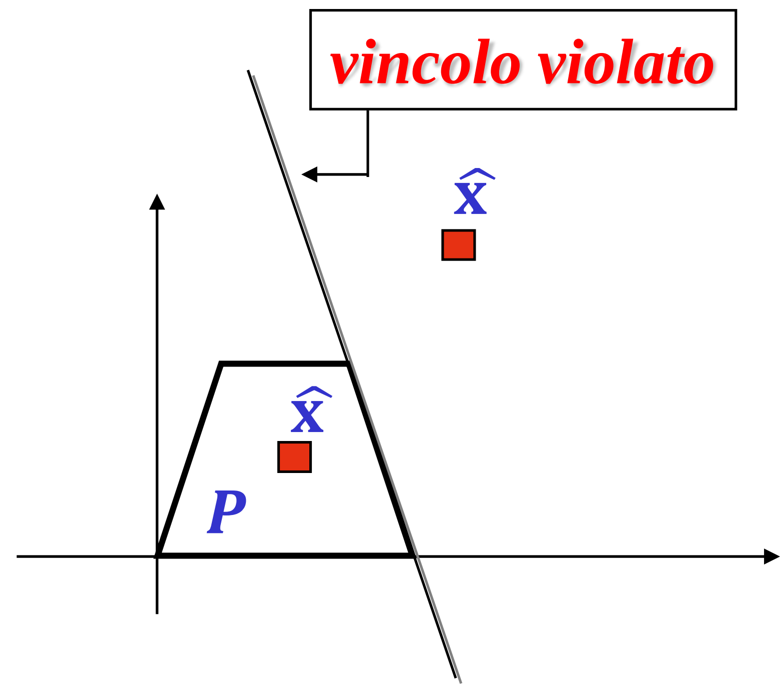
Descrizione "***implicita***" di un poliedro $\boldsymbol{P}$:

$$\boxed{P = \{x \in R^n : Ax \le b \equiv a_i^T x \le b_i \; (i \in \{1, \dots, m\})\}}$$

$\hat{x} \in R^n$ → **Oracolo di Separazione di P** → $\hat{x} \in P$

→ $\hat{x} \notin P$, $a_i^T \hat{x} > b_i$

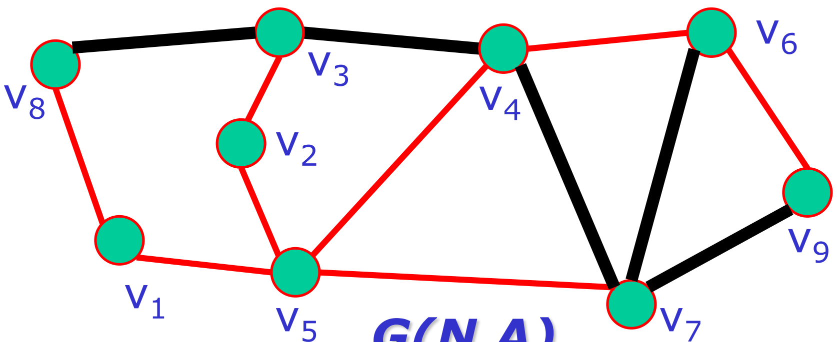




Esempio 1: *"grafo connesso ricoprente"*

Grafo connesso $G(N,A)$

$\mathcal{S}$ = { *insiemi di archi* ***la cui rimozione*** ***non disconnette*** ***il grafo*** $G(N,A)$ }



G(N,A)

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N, \overline{T})$ **connesso**

Circuiti = Tagli minimali

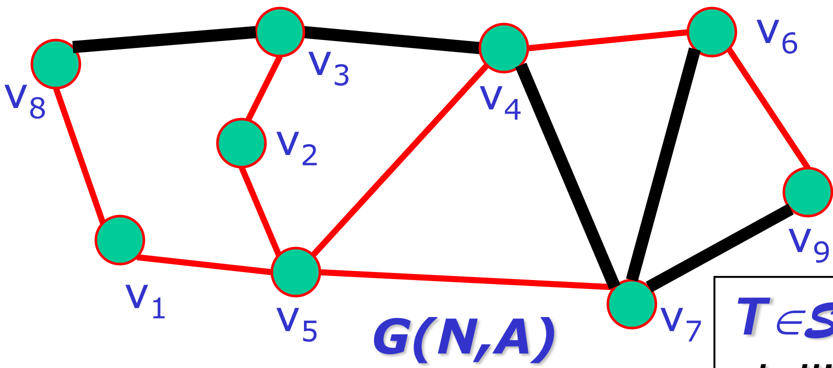
Formulazione circuiti:

$$P_C = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e \in K} x_e \leq |K| - 1 & \forall \text{ taglio } K \\ x_e \geq 0, e \in E \end{cases}$$

Esempio: "grafo connesso ricoprente" (II)

Grafo connesso G(N,A)

$T \in \mathcal{S} \Leftrightarrow H(N,\bar{T})$ connesso ricoprente



$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} y_e \le |K| - 1 & \forall \text{ taglio } K \\ 1_{|A|} \ge y_e \ge 0, & e \in A \end{cases}$$

$T \in \mathcal{S}$ **se e solo se** T è il **complemento** dell'insieme degli archi di un **sottografo connesso ricoprente**. Dunque:

$$y \in P_C \cap \{0,1\}^{|A|} \Leftrightarrow x = 1_{|A|} - y$$

x vettore di incidenza degli archi di un **sottografo connesso ricoprente**

Nuovo Poliedro

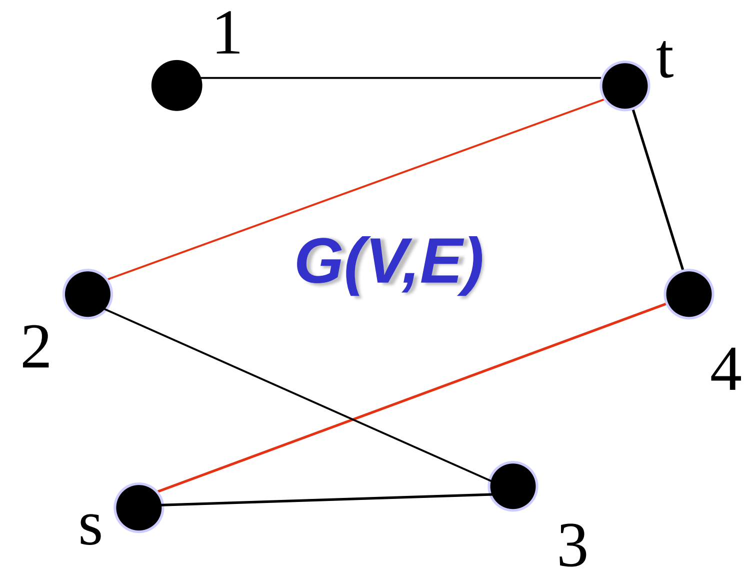
$$P = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \ge 1 & \forall \text{ taglio } K \\ 1_{|A|} \ge x_e \ge 0, e \in A \end{cases}$$

P è la Formulazione ("tagli") di :

$$S = \left\{ \begin{matrix} x = 1_{|A|} - y \; : \\ y \in P_C \cap \{0,1\}^{|A|} \end{matrix} \right\}$$

Grafo connesso ricoprente: separazione

x* vettore di incidenza** *degli archi di un* ***sottografo connesso ricoprente



Formulazione “tagli”:

$$P = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \geq 1 & \forall \text{ taglio } K \\ 0 \leq x_e \leq 1, e \in E \end{cases}$$

ORACOLO DI SEPARAZIONE

$\hat{x} \in R^n$ →

- ***Se*** $\hat{x}_e > 1$ *o* $\hat{x}_e < 0$ *per qualche* ***e*** $\in$ ***E*** → $\hat{x} \notin P$

  [verificabile per ispezione]

- ***Se*** *esiste un taglio* ***K*** *di* ***G*** *tale che* $\sum_{e \in K} \hat{x}_e < 1$ → $\hat{x} \notin P$

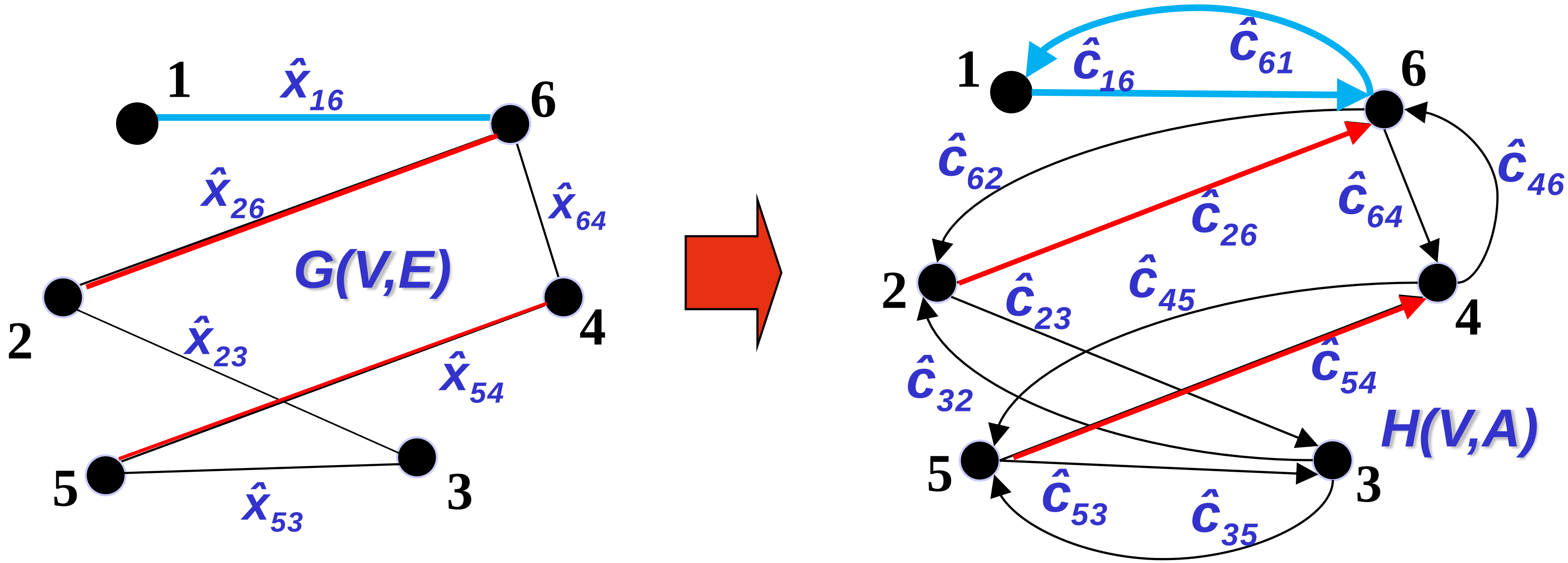
  [per ***ogni coppia s-t*** applica *flusso-massimo/taglio-minimo*]

Altrimenti → $\hat{x} \in P$

Separazione disequazioni "taglio"

Dato $\hat{x} \in R^n$

- ***Costruisci*** un grafo orientato ***H(V,A)*** sostituendo ogni arco non orientato ***(u,v)*** di ***G(V,E)*** con la ***coppia di archi orientati (u,v), (v,u)*** di ***H***



- *Per ogni* ***uv*** $\in$ ***E*** *assegna agli archi di A* ***capacità*** $\hat{c}_{uv} = \hat{c}_{vu} = \hat{x}_{uv}$

- *Per ogni* ***K = δ_G(W)*** taglio di ***G*** $\Rightarrow \sum_{e \in \delta_G(W)} \hat{x}_e = \sum_{e \in \delta_H^+(W)} \hat{c}_e = \hat{c}(W)$

Separazione disequazioni "taglio" (II)

Esiste un taglio K di G tale che: $\sum_{e \in K} \hat{x}_e < 1$ **?**

- **Trova** il taglio a ***capacità minima*** $\delta^+_H(W)$ di ***H(V,A)***

  [risolvendo il problema del ***massimo flusso*** per ogni *coppia s-t* e scegliendo il ***minimo dei tagli minimi s-t***]

- ***Detto W^* il taglio minimo …. Se*** $\hat{c}(W^*) = \sum_{uv \in \delta^+_H(W^*)} \hat{c}_{uv} \geq 1$

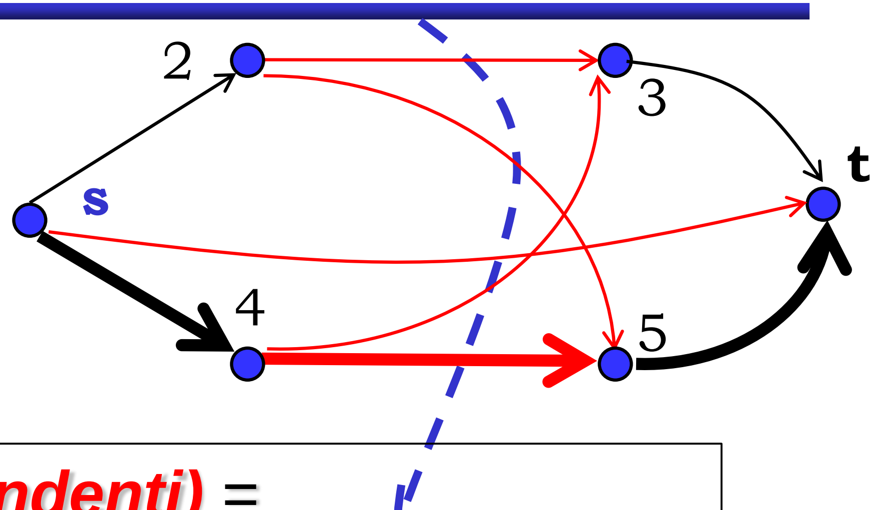
$\Rightarrow \sum_{uv \in \delta^+_H(W)} \hat{c}_{uv} \geq 1$ **per ogni** taglio $\delta^+_H(W)$ di ***H(V,A)***

$\Rightarrow \sum_{uv \in \delta_G(W)} \hat{x}_e \geq 1$ **per ogni** taglio $K = \delta_G(W)$ di ***G(V,E)*** $\Rightarrow \hat{x} \in P$

- ***Se invece*** $\hat{c}(W^*) = \sum_{uv \in \delta^+_H(W^*)} \hat{c}_{uv} < 1$

$\Rightarrow \sum_{uv \in \delta_G(W)} \hat{x}_e < 1 \Rightarrow$ $K^* = \delta_G(W^*)$ *taglio* di ***G(V,E)*** *violato* dal vettore $\hat{x}$ $\Rightarrow \hat{x} \notin P$

Esempio 2: Separazione Grafo s-t connesso



Elementi = *archi orientati*

Soluzioni = *Insiemi di archi* ***contenenti*** *un* ***cammino s-t***

Complementi di soluzioni (indipendenti) = *Insiemi di archi* ***la cui rimozione preserva*** *un* ***cammino s-t***

Circuiti *(del sistema di indipendenza)* ***= "tagli" s-t*** *[Perché ?]*:

$\delta^+(s,2,4) = \{st, 23, 25, 43, 45\} = K_1$ $\qquad$ $[\delta^+(s,2,3,4) = ?]$

$\delta^+(s) = \{st, s2, s4\} = K_2$

Formulazione circuiti ("tagli" s-t):

$$P_C = \begin{cases} \sum_{e \in K} y_e \le |K| - 1 \quad \forall \text{ taglio } s\text{–}t \ K \\ 0 \le y_e \le 1, \qquad e \in E \end{cases}$$

Esempio 2: Separazione Grafo s-t connesso

Trasformazione affine della **Formulazione circuiti ("tagli" s-t):**

$$P = \{x \in R^n : x = 1_n - y,\ y \in P_C\}$$

$$P = \begin{cases} \sum_{e \in K} x_e \geq 1 & \forall \text{ taglio } s\text{–}t\ K \\ 0 \leq x_e \leq 1, & e \in E \end{cases}$$

ORACOLO DI SEPARAZIONE

Input: $\hat{x} \in R^n$

- **Se** $\hat{x}_e > 1$ o $\hat{x}_e < 0$ per qualche **e** $\in$ **E** → $\hat{x} \notin P$

  [verificabile per ispezione]
- **Se** esiste un ***taglio s-t K*** di **G** : $\sum_{e \in K} \hat{x}_e < 1$ → $\hat{x} \notin P$

  [applica *flusso-massimo/taglio-minimo a* **G**]

Altrimenti → $\hat{x} \in P$

Metodo del Simplesso Dinamico

Risolve un problema di **Programmazione Lineare**:

$$\min c^T x : \; x \in P = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \le b, \; 1_n \ge x \ge 0_n\}$$

Due ingredienti:

$\hat{x} \in \mathbf{R}^n$

Oracolo di Separazione

di P

$\hat{x} \in P$

$\hat{x} \notin P$

$a_i' \hat{x} > b_i$

$\min c^T x$

$Ax \le b,$

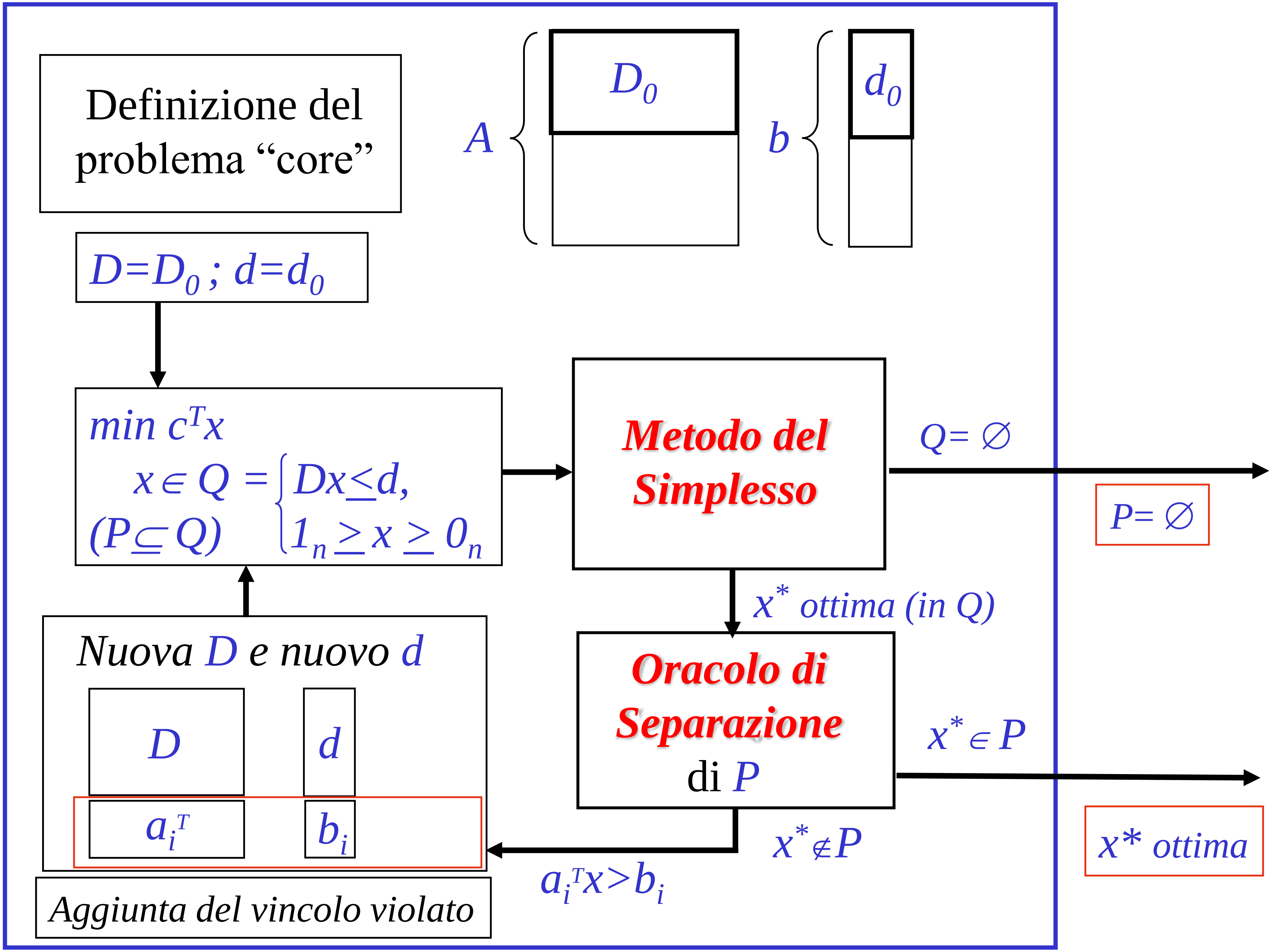
$1_n \ge x \ge 0_n$

Metodo del Simplesso

x^* *soluzione ottima*

~~problema illimitato~~

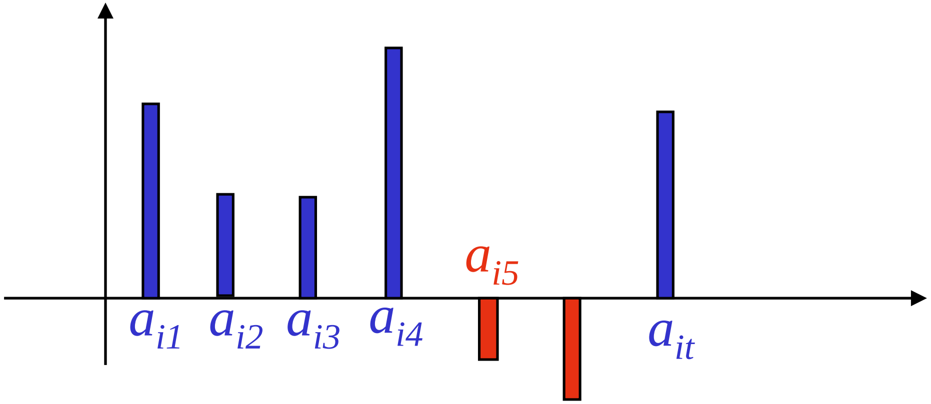
nessuna soluzione ($P = \emptyset$)

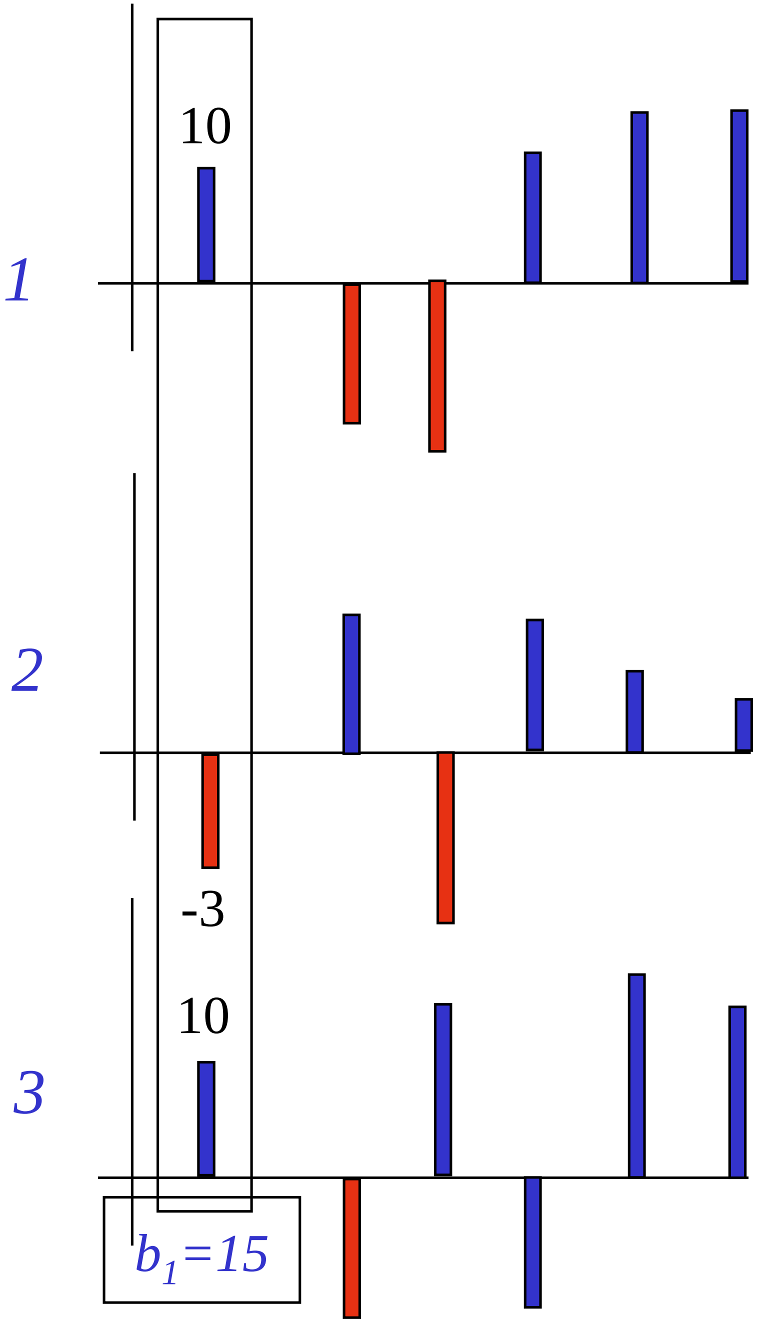

Definizione del problema "core"
A
D0
b
d0
D=D0 ; d=d0
min c^T x
x ∈ Q = { Dx ≤ d, 1n ≥ x ≥ 0n
(P ⊆ Q)
Metodo del Simplesso
Q= ∅
P= ∅
x* ottima (in Q)
Oracolo di Separazione di P
x* ∈ P
x* ottima
x* ∉ P
ai^T x > bi
Nuova D e nuovo d
D
d
ai^T
bi
Aggiunta del vincolo violato

Esempio: Pianificazione degli Investimenti

DATI

- Insieme $I = \{1,2,\ldots,n\}$ di Investimenti
- Indice di redditività (vantaggio) c_i dell'investimento i
- <u>Redditività totale di un insieme</u> $F \subseteq I$: $c(F) = \sum_{i \in F} c_i$
- Orizzonte temporale $T = \{1,2,\ldots,t\}$
- *Vettore dei flussi di cassa* $a_i = (a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{it})$ dell'investimento i
- *"Budget"* b_j del periodo $j \in T$





$$(a_{11}, a_{12},\ldots, a_{1t})$$

$$(a_{21}, a_{22},\ldots, a_{2t})$$

$$(a_{31}, a_{32},\ldots, a_{3t})$$

$$\le b_1$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \notin S$$

Pianificazione degli Investimenti I

TROVARE

Insieme di investimenti F^* di <u>redditività totale massima</u> e tale che la somma dei flussi di cassa a_{ij} dei progetti attivati sia, in ogni periodo $j \in T$, inferiore al budget b_j .

S = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in <u>ogni periodo</u>*}

Pianificazione degli Investimenti II

$\boldsymbol{S}$ = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in ogni periodo*}

c_i — *Indice di redditività* del progetto i

- *Tasso interno di rendimento* (TIR) - (*Internal Rate of Return* (IRR))
- *Valore attuale netto* (VAN) - (*Net Present Value* (NPV))
- *Periodo (Punto) di "Breakeven"* - (*Payback* (PBK))

$$\max c^T x$$
$$x \in \boldsymbol{S}$$
$$x_i \leq x_j$$
$$x_i + x_j \leq 1$$
$$x_i = x_j$$

Relazioni tra progetti (vincoli aggiuntivi):

- i può essere svolto *solo se* j viene svolto
- *solo uno tra* i e j deve essere svolto (*ad es. se* i e j *sono copie dello stesso progetto con stessi flussi di cassa e diversi periodi iniziali*):
- i *viene svolto se e solo se viene svolto* j

Pianificazione degli Investimenti - Formulazione Naturale

$\boldsymbol{S}$ = {*Vettori di incidenza degli insiemi di progetti compatibili con i vincoli di "budget" in* <u>*ogni periodo*</u>}

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots, & a_{1t} \\ a_{21}, & a_{22}, \dots, & a_{2t} \\ & \dots & \\ a_{n1}, & a_{n2}, \dots, & a_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\leq$$

$$b^T = [\, b_1, b_2, \dots, b_t \,]$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1} \\ a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2} \\ \dots \\ a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{nt} \end{pmatrix} \quad \leq \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_t \end{pmatrix}$$

$\boxed{x \in \boldsymbol{S}}$ $\Rightarrow$ $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 +, \dots, a_{n1}x_n \leq b_1$

$\boxed{x \in \boldsymbol{S}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x \in \{0,1\}^n, Ax \leq b}$

Pianificazione degli Investimenti - Formulazione Naturale

$$\begin{array}{l} \max c^T x \\ x \in \boldsymbol{S} \\ \text{vincoli aggiuntivi} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \\ \text{vincoli aggiuntivi} \end{array}$$

$P_0 = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Ax \leq b,\ 1_n \geq x \geq 0_n\}$ <u>*Formulazione Naturale*</u>

Esistono formulazioni migliori?

<u>Idea</u>: *Utilizzare la* ***formulazione circuiti («cover»)*** *del* ***sistema di indipendenza*** *del* ***«knapsack a coefficienti positivi»***

Come ?

Pianificazione degli Investimenti - Singolo "knapsack"

Osservazione:

Il vincolo relativo ad un singolo periodo i definisce un problema di "knapsack" *(con coefficienti positivi e negativi)*

$$KP_i = \{\max c^T x : \boxed{a_i^T x \le b_i,\ 1_n \ge x \ge 0_n},\ x \in \{0,1\}^n\} \equiv$$

$$\equiv \{\max c^T x : x \in \boxed{P_{0i}},\ x \in \{0,1\}^n\} \equiv \{\max c^T x : x \in \mathbf{S}_i\}$$

Formulazione naturale del "Knapsack"

$$\mathbf{S} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathbf{S}_i$$

*L'insieme S delle soluzioni del problema di Pianificazione degli Investimenti è l'**intersezione degli insiemi delle soluzioni S_i dei singoli problemi KP_i***

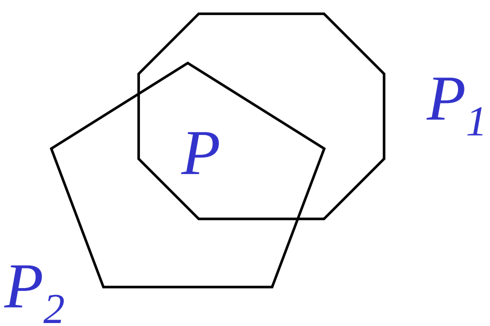
Pianificazione Investimenti - Intersezione di Formulazioni

P_i **Formulazione di** KP_i $\Longleftrightarrow$ $S_i = P_i \cap \{0,1\}^n$

$S = \bigcap_{i=1}^{t} S_i$ $\Rightarrow$ $S \subseteq S_i$ *per ogni periodo («knapsack») i*

$\Downarrow$

$S \subseteq P = \bigcap_{i=1}^{t} P_i$



$x \in \{0,1\}^n - S$ $\Rightarrow$ $x \in \{0,1\}^n - S_i$ *per qualche i* $\Rightarrow$ $x \notin P_i$ $\Rightarrow$ $x \notin P$

$P \cap \{0,1\}^n \subseteq S$

Esempio: $P_0 = \bigcap_{i=1}^{t} P_{0i}$

P **Formulazione del problema di Pianificazione degli Investimenti**

La formulazione naturale è l'intersezione delle formulazioni naturali dei "knapsack"

Da “knapsack” a “ knapsack con coefficienti positivi”

$a^T x \leq b$ “knapsack” con $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\qquad N = \{1,2,\dots,n\}$

$J^+ = \{j \in N\colon \boldsymbol{a_j} \geq \mathbf{0}\}$

$J^- = \{j \in N\colon \boldsymbol{a_j} < \mathbf{0}\}$

Trasformazione:

$$\begin{cases} z_j = x_j & j \in J^+ \\ y_j = 1 - x_j & j \in J^- \end{cases}$$

$$\sum_{j \in N} a_j x_j = \sum_{j \in J^+} a_j x_j + \sum_{j \in J^-} a_j x_j = \sum_{j \in J^+} a_j z_j + \sum_{j \in J^-} a_j (1 - y_j) =$$

$$= \sum_{j \in J^+} a_j z_j - \sum_{j \in J^-} a_j y_j + \sum_{j \in J^-} a_j \leq b$$

“knapsack” a coefficienti positivi

$$\sum_{j \in J^+} a_j z_j - \sum_{j \in J^-} a_j y_j \leq b - \sum_{j \in J^-} a_j$$

$$\begin{cases} \bar{a}_j = a_j & j \in J^+ \\ \bar{a}_j = -a_j & j \in J^- \\ \bar{b} = b - \sum_{j \in J^-} a_j \end{cases}$$

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j z_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j y_j \leq \bar{b}$$

«Cover» di un "knapsack"

$$\sum_{j\in J^+} \bar{a}_j z_j + \sum_{j\in J^-} \bar{a}_j y_j \le \bar{b}$$

knapsack" a coefficienti positivi

$C \subseteq N$ è un **«cover»** se e solo se: $\sum_{j\in C\cap J^+} \bar{a}_j + \sum_{j\in C\cap J^-} \bar{a}_j > \bar{b}$

Esempio:

$$\boxed{2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 \le 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 4y_4 \le 6}$$

$J^+ = \{1,2,3\}$

$J^- = \{4\}$

"knapsack" a coefficienti positivi

«cover» : {1,3},{2,3},{ 3,4},{ 1,2,3}, {1,2,4}, {2,3,4}, {1,3,4}, {1,2,3,4}

circuiti («cover minimali»): {1,3},{2,3},{ 3,4},{ 1,2,3}, {1,2,4},

$\mathcal{C}_{a,b}$= *Insieme dei* **«cover»** *associati al "knapsack"* $a^T x \geq b$

$T \subseteq N$ *è un* ***indipendente*** *se e solo se:*

$$|C \cap T| \leq |C|\text{-}1 \quad \textit{per ogni} \quad C \in \mathcal{C}_{a,b}$$

$$\begin{cases} z_i & i \in J^+ \\ y_i & i \in J^- \end{cases}$$

vettore di incidenza di T

$$\sum_{j \in C \cap J^+} z_j + \sum_{j \in C \cap J^-} y_j \leq |C| - 1 \quad \textit{per ogni} \quad C \in \mathcal{C}_{a,b}$$

$$\begin{cases} x_j = z_j & j \in J^+ \\ x_j = 1 - y_j & j \in J^- \end{cases}$$

trasformazione inversa

$$\sum_{j \in C \cap J^+} x_j - \sum_{j \in C \cap J^-} x_j \leq |C| - 1 - |C \cap J^-| \quad \textit{per ogni} \quad C \in \mathcal{C}_{a,b}$$

Pianificazione Investimenti – Formulazione «cover»

$P_0 = \{x \in \boldsymbol{R}^n: Ax \leq b,\ 1_n \geq x \geq 0_n\}$ **Formulazione Naturale**

$\mathcal{C}_{a_i,b_i}$ = *insieme dei* **cover** *del "knapsack"* $a_i^T x \leq b_i$

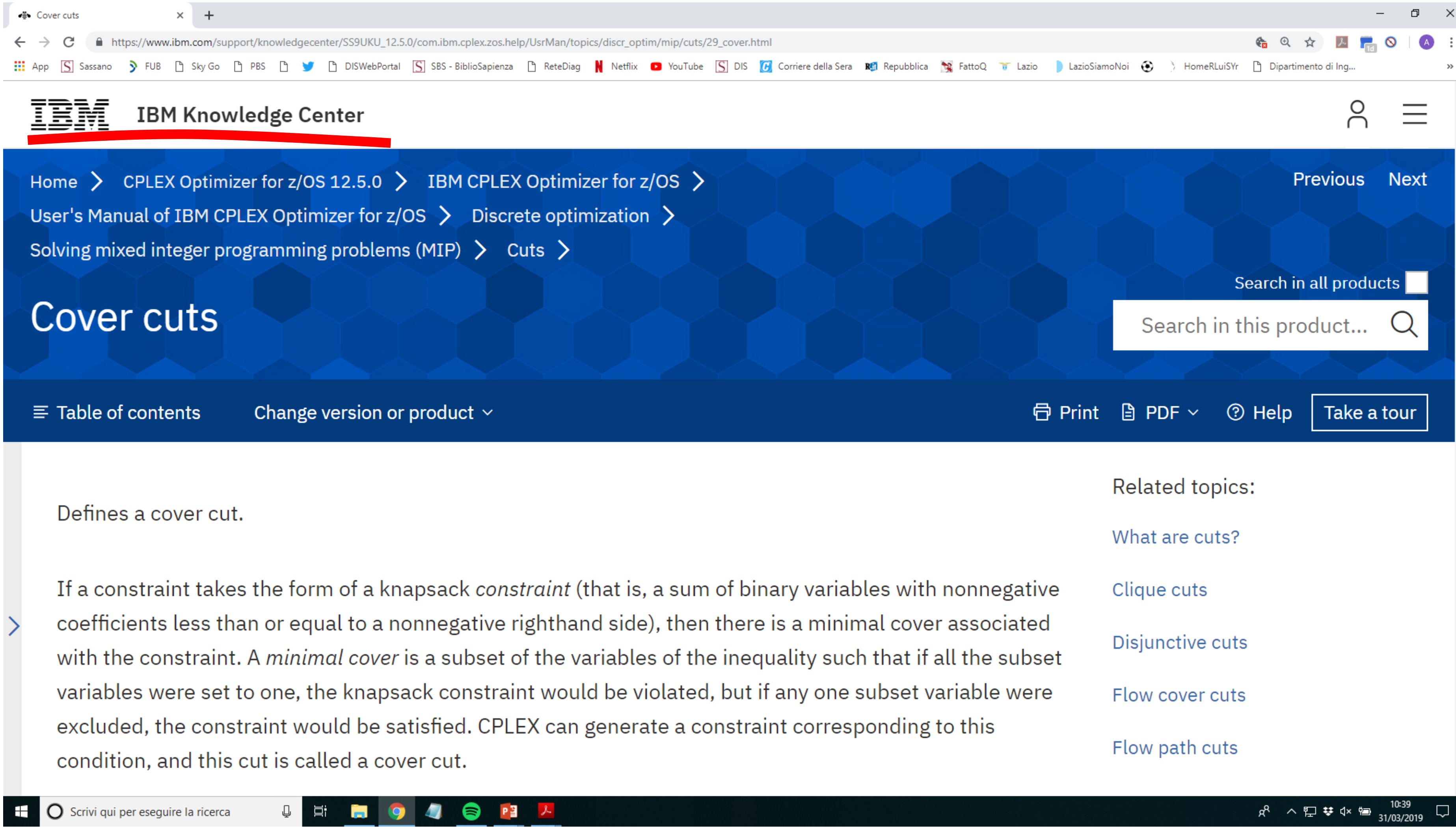
$$\boxed{P_i = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \sum_{j \in C \cap J^+} x_j - \sum_{j \in C \cap J^-} x_j \leq |C| - 1 - |C \cap J^-| \quad \text{per ogni } C \in \mathcal{C}_{a_i,b_i} \right\}}$$

Formulazione «cover» del"knapsack" KP_i

$$\boxed{P = \bigcap_{i=0}^{t} P_i}$$ **Formulazione cover della Pianificazione Investimenti**

- $P \subseteq P_0$ **Formulazione (molto) migliore di quella Naturale**
  - *Le disequazioni cover* *appartengono alla formulazione ottima*

Oracolo di Separazione delle disequazioni «Cover»



CPLEX Optimizer (IBM)

Oracolo di Separazione delle disequazioni «Cover»

$\mathcal{C}_{a^i,b^i}$: *insieme dei* **cover** *del "knapsack"* $\quad {a^i}^T x \le b^i$

con: $\quad {a^i}^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

$$\boxed{P_i = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \sum_{j \in C \cap J^+} x_j - \sum_{j \in C \cap J^-} x_j \le |C| - 1 - |C \cap J^-| \quad \text{per ogni } C \in \mathcal{C}_{a^i,b^i} \right\}}$$

$\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n$ → **Oracolo di Separazione**

→ $\boldsymbol{\hat{x} \in P_i}$

→ $\boldsymbol{\hat{x} \notin P_i}$

$$\sum_{j \in C \cap J^+} \hat{x}_j - \sum_{j \in C \cap J^-} \hat{x}_j > |C| - 1 - |C \cap J^-|$$

$C \in \mathcal{C}_{a^i,b^i}$

Oracolo di Separazione disequazioni «Cover» (II)

$$\sum_{j\in C\cap J^+} \hat{x}_j - \sum_{j\in C\cap J^-} \hat{x}_j > |C| - 1 - |C \cap J^-|$$

Disequazione associata a C <u>violata</u>

$u \in \{0,1\}^n$ **vettore di incidenza di un «cover»** C

$$\sum_{j\in J^+} \hat{x}_j u_j - \sum_{i\in J^-} \hat{x}_j u_j > \sum_{j\in N} u_j - 1 - \sum_{i\in J^-} u_j$$

$$\sum_{j\in J^+} \hat{x}_j u_j - \sum_{j\in J^-} \hat{x}_j u_j > \sum_{j\in J^+} u_j - 1$$

$$\boxed{\sum_{j\in J^+} (\hat{x}_j - 1) u_j - \sum_{j\in J^-} \hat{x}_j u_j > -1}$$

La disequazione associata ad un «cover» C è violata da $\hat{x}$ se e solo se il vettore di incidenza di C soddisfa la disequazione precedente.

Oracolo di Separazione disequazioni «Cover» (III)

$u \in \{0,1\}^n$ vettore di incidenza di un **«cover»** $C \in \mathcal{C}_{a^i,b^i}$

$\mathcal{C}_{a^i,b^i}$: *insieme dei cover del "knapsack"* $a^{i^T} x \leq b^i$

Come scrivere u in funzione di $\boldsymbol{a^i}$ e $\boldsymbol{b^i}$?

Trasformiamo $a^{i^T} x \leq b^i$ in un **«knapsack a coefficienti positivi»**

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j z_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j y_j \leq \bar{b}$$

$u \in \{0,1\}^n$ vettore di incidenza di un **«cover»**

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j > \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

Se $\bar{\boldsymbol{a}}$ e $\bar{\boldsymbol{b}}$ interi

Oracolo di Separazione disequazioni «Cover» (IV)

Abbiamo dunque:

A

La disequazione associata ad un cover C è violata da $\hat{x}$ se e solo se il vettore di incidenza di C soddisfa la disequazione:

$$\sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1) u_j - \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j > -1$$

B

$u \in \{0,1\}^n$ vettore di incidenza di un **«cover»** *C se e solo se:*

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

La disequazione associata ad un cover C è violata da $\hat{x}$ se e solo se:

u è il vettore di incidenza del ***«cover violato»*** *C*

$$\begin{cases} \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1) u_j - \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j u_j > -1 \\ \sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1 \end{cases}$$

Come trovare il vettore u ?

Oracolo di Separazione disequazioni «Cover» (V)

A $\displaystyle \boxed{\sum_{j\in J^+}(\hat{x}_j - 1)\, u_j - \sum_{j\in J^-}\hat{x}_j\, u_j} \quad > \quad -1$

B $\displaystyle \sum_{j\in J^+}\bar{a}_j u_j + \sum_{j\in J^-}\bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$

$z(u)$

$$\max \quad \boxed{\sum_{j\in J^+}(\hat{x}_j - 1)\, u_j - \sum_{j\in J^-}\hat{x}_j\, u_j}$$

$$\sum_{j\in J^+}\bar{a}_j u_j + \sum_{j\in J^-}\bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

u soluzione ottima*

Se $z(u^*) \leq -1$ → *u* __*ammissibile*__ $z(u) \leq z(u^*) \leq -1$ → Non esiste un vettore *u* che soddisfa le condizioni A e B → Nessun **"cover"** *C* è violato da $\hat{x}$

Se $z(u^*) > -1$ → ***u**** *vettore di incidenza di un* __***cover minimale***__ *violato da* $\hat{x}$ ***[Perché minimale ?]***

$$P_i = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \sum_{j \in C \cap J^+} x_j - \sum_{j \in C \cap J^-} x_j \le |C| - 1 - |C \cap J^-| \quad \text{per ogni } C \in C_{a_i, b_i} \right\}$$

Oracolo di Separazione per P_i

$$z(u) = max \sum_{j \in J^+} (\hat{x}_j - 1)\, u_j - \sum_{j \in J^-} \hat{x}_j\, u_j$$

$$\sum_{j \in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j \in J^-} \bar{a}_j u_j \ge \bar{b} + 1$$

$$u \in \{0,1\}^n$$

$\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n$

Se $\boldsymbol{z(u^*) \le -1}$ → $\hat{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{P_i}$

Se $\boldsymbol{z(u^*) > -1}$ → $\hat{\boldsymbol{x}} \notin \boldsymbol{P_i}$

u^* *vettore di incidenza di un* **cover minimale** violato da $\hat{x}$

Oracolo di Separazione Approssimato per P_i

$$\cancel{z(u)} = \max \sum_{j\in J^+} (\hat{x}_j - 1)\, u_j - \sum_{j\in J^-} \hat{x}_j\, u_j$$

z_{LP}

$$\sum_{j\in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j\in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$\cancel{u \in \{0,1\}^n} \qquad 1_n \geq u \geq 0_n$$

- $\boldsymbol{u}^*$ soluzione ottima del problema (0,1)
- $\boldsymbol{u}^0$ soluzione ottima del rilassamento [$\boldsymbol{z_{LP} = z(u^0)}$]
- $\boldsymbol{u}^+$ arrotondamento all'intero superiore della soluzione ottima $\boldsymbol{u}^0$ del rilassamento

$\hat{x} \in \boldsymbol{R}^n$

Se $\boldsymbol{z_{LP} \leq -1}$ ⇒ $\boldsymbol{z(u^*) \leq z_{LP} \leq -1}$ → $\hat{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{P_i}$

Se $\boldsymbol{z(u^+) > -1}$ → $\hat{\boldsymbol{x}} \notin \boldsymbol{P_i}$

$\boldsymbol{u}^+$ vettore di incidenza di un **cover** violato da $\hat{\boldsymbol{x}}$

Esempio: **Formulazione «cover» della Pianificazione Investimenti**

$$\max \quad 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5$$

$$\boxed{2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 5}$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 5$$

$$\cancel{x \in \{0,1\}^5} \qquad \mathbf{1_5 \geq x \geq 0_5}$$

$$J^+ = \{1,4,5\}$$

$$J^- = \{2, 3\}$$

<u>Soluzione ottima del rilassamento</u>:

$$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1;\ x^*_4 = 0;\ x^*_5 = 3/4$$

$$z^* = 18.25$$

$$2z_1 + 3y_2 + 4y_3 + 3z_4 + 5z_5 \leq 12$$

"knapsack" a coefficienti positivi

La trasformazione non puo' essere effettuata su tutto il sistema !

Esaminiamo (e trasformiamo) un "knapsack" alla volta e ai soli fini dell'individuazione di vincoli "cover" violati

Soluzione ottima del rilassamento:

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1;\ x^*_4 = 0;\ x^*_5 = 3/4$

$z^* = 18.25$

$2z_1 + 3y_2 + 4y_3 + 3z_4 + 5z_5 \leq 12$

"knapsack" a coefficienti positivi

Oracolo Approssimato:

$J^+ = \{1,4,5\}$

$J^- = \{2, 3\}$

$$\max_u \sum_{j\in J^+} (x_j^* - 1)\, u_j - \sum_{i\in J^-} x_j^* u_j$$

$$\sum_{j\in J^+} \bar{a}_j u_j + \sum_{j\in J^-} \bar{a}_j u_j \geq \bar{b} + 1$$

$$1_n \geq u \geq 0_n$$

$$\max\ (x_1^* - 1)\ u_1 - x_2^*\ u_2 - x_3^*\ u_3 + (x_4^* - 1) u_4 + (x_5^* - 1) u_5$$

$$= \max -u_2 - u_3 - u_4 - \frac{1}{4} u_5$$

$$2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 3u_4 + 5u_5 \geq 13$$

$$1_5 \geq u \geq 0_5$$

Soluzione $\boldsymbol{u^0}$: $u^\circ_1 = u^\circ_5 = u^\circ_4 = 1;\ u^\circ_2 = \frac{2}{3};\ u^\circ_3 = 0$

$\boldsymbol{z(u^+)} = -\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{23}{12} < -1$ ⇒ **Nessun "cover" violato**

Esempio: **Formulazione «cover» della Pianificazione Investimenti**

$$\max \quad 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 5$$

$$\boxed{x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 5}$$

$$\cancel{x \in \{0,1\}^5} \quad 1_5 \geq x \geq 0_5$$

Soluzione ottima del rilassamento:

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1;\ x^*_4 = 0;\ x^*_5 = 3/4$

$z^* = 18.25$

$$z_1 + 4z_2 + 3y_3 + 3z_4 + 4z_5 \leq 8$$

"knapsack" a coefficienti positivi

$J^+ = \{1, 2, 4, 5\}$

$J^- = \{3\}$

Soluzione ottima del rilassamento:

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1;\ x^*_4 = 0;\ x^*_5 = 3/4$

$z^* = 18.25$

$z_1 + 4z_2 + 3y_3 + 3z_4 + 4z_5 \leq 8$

"knapsack" a coefficienti positivi

Oracolo Approssimato:

$$J^+ = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$J^- = \{3\}$$

$$\max_u \sum_{i \in J^+} (x_i^* - 1)\, u_i - \sum_{i \in J^-} x_i^* u_i$$

$$\sum_{k \in J^+} \bar{a}_k u_k + \sum_{i \in J^-} \bar{a}_k u_k \geq \bar{b} + 1$$

$$1_n \geq u \geq 0_n$$

$$\max\ (x_1^* - 1)\, u_1 - (x_2^* - 1)\, u_2 - x_3^*\, u_3 + (x_4^* - 1) u_4 + (x_5^* - 1) u_5$$

$$= \max -u_3 - u_4 - \frac{1}{4} u_5$$

$$u_1 + 4u_2 + 3u_3 + 3u_4 + 4u_5 \geq 9$$

$$1_5 \geq u \geq 0_5$$

$$\boldsymbol{u^0 \equiv u^+}$$

u^+ vettore di incidenza del «cover» $C = \{1, 2, 5\}$

Soluzione $\boldsymbol{u^0}$: $u^\circ_1 = u^\circ_2 = u^\circ_5 = 1;\ u^\circ_3 = u^\circ_4 = 0$

$$\boldsymbol{z(u^+)} = -\frac{1}{4} > -1$$

$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_5 \leq 2}$ **Disequazione del «cover» C violata**

Esempio: Formulazione «cover» della Pianificazione Investimenti

$$\max \quad 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 5$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 5$$

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_5 \leq 2}$$

$$\cancel{x \in \{0,1\}^5} \qquad 1_5 \geq x \geq 0_5$$

Soluzione ottima del rilassamento:

$$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = x^*_4 = 1;\ x^*_5 = 0;$$

$$z^* = 18$$

Soluzione ottima del problema intero (**fortunati!**)