5 Soluzione grafica di problemi di ottimizzazione

In questo paragrafo, consideriamo problemi di ottimizzazione lineare in due variabili e otteniamo la soluzione per via grafica.

Esempio 2 *Sia la funzione obiettivo da minimizzare:*

$$f(x) = x_1$$

e sia l'insieme ammissibile F definito dai vincoli:

$$\begin{aligned} &(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 13 \\ &(x_1 - 4)^2 + {x_2}^2 \leq 16 \end{aligned}$$

Determinare, se esiste, un punto di minimo.

Soluzione.

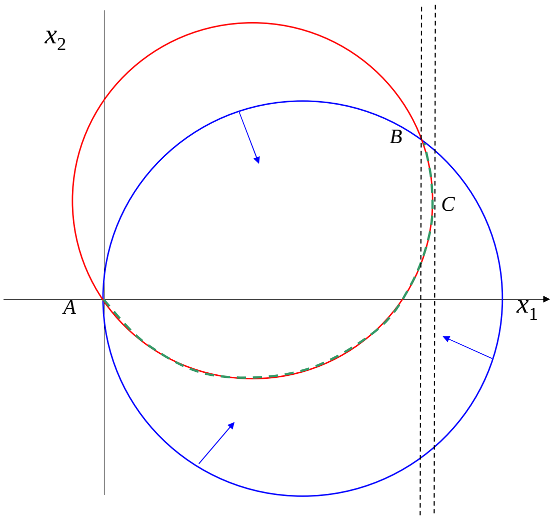

Figure 2: Soluzione grafica in $\mathbb{R}^2$ dell'Esempio 2.

L'insieme ammissibile $\mathcal{F}$, rappresentato in Figura (2), ed è dato dall'arco di circonferenza $\widehat{ACD}$. Poiché esso é compatto e f è continua, in base al Teorema di Weierstrass, l'esistenza di un minino globale è assicurata.

Dallo studio del grafico, disegnate le curve di livello $x_1 = k$ al variare di k, si determina il punto di minimo globale nel punto $A = (0, 0)^T$ di valore $f^* = 0$. Si osserva che il punto C è un massimo globale, mentre il punto B risulta essere un minimo locale.

Esempio 3 *Sia dato il problema di ottimizzazione vincolata*

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 6x_1 + x_2^2 - x_2 \leq 12 \\ & x_1 - 4x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Determinare, se esiste, un punto di minimo globale.

Esempio 4 *Si consideri la funzione obiettivo:*

$$f(x) = \frac{1}{2}({x_1}^2 + {x_2}^2)$$

e sia l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ definito dai vincoli:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ (x_1 - 1)^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{4} \end{array}$$

Determinare se esiste un punto di minimo.

Soluzione. L'insieme ammissibile F é dato dal segmento di retta che ha per estremi i punti $\tilde{x} = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^T$ e $\bar{x} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) T$.

L'esistenza di una soluzione é garantita dal Teorema di Weierstrass poiché la funzione obiettivo é continua e l'insieme ammissibile é compatto.