7 Le condizioni di ottimalità.

7.1 Generalità

Una soluzione locale x^* di un problema di ottimizzazione deve sodddisfare una *condizione necessaria di ottimalità* (CNO). Ad esempio, per il problema non vincolato

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x), \tag{8}$$

la CNO consiste nel fatto che la derivata della funzione f si deve annullare in x^*: $df(x^*)/dx = 0$. Ricordiamo però sempre che i punti che soddisfano una CNO per un problema non sono necessariamente soluzioni del problema stesso: ad esempio i punti che annullano la derivata di f nel Problema (8) possono essere punti di massimo, anziché di minimo. Comunque, la definizione di CNO è di fondamentale importanza nell'Ottimizzazione, poichè detto Ω l'insieme dei punti che soddisfa la CNO, e risultando evidentemente $\Omega \subseteq \mathcal{F}$, ci si può limitare a cercare la soluzione nell'insieme Ω anziché in tutto $\mathcal{F}$, che di solito è molto più grande di Ω. Per un punto ammissibile generico $x \in \mathcal{F}$, la CNO fornisce un *certificato di ottimalità*, nel senso che se $x \notin \Omega$, x non può essere soluzione del problema, mentre può esserlo (ma può anche non esserlo) se $x \in \Omega$.

Se poi un punto x^* soddisfa una *condizione sufficiente di ottimalità* (CSO) per un problema di ottimizzazione, si puo affermare che x^* è una soluzione locale del problema stesso. Ad esempio, per il Problema (8), una condizione sufficiente di ottimalità è che in x^* si annulli la derivata prima e sia positiva la derivata seconda: $df(x^*)/dx = 0$, $d^2f(x^*)/dx^2 > 0$. Ricordiamo però che un punto x^* che è soluzione di un problema di ottimizzazione può non soddisfare la CSO per il problema stesso: ad esempio, il problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = x^4,$$

ha come soluzione $x^* = 0$, anche se la derivata seconda di x^4 in $x^* = 0$ si annulla, anzichè essere positiva. Pertanto, se per un problema di ottimizzazione si è trovato un punto di Ω che non soddisfa la relativa CSO, non si può escludere che il punto trovato sia soluzione del problema.

Domande

1) Quali condizioni di ottimalità sono soddisfatte per il problema $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = x^3$?

2) Cosa si può intendere per *condizione necessaria e sufficiente di ottimalità* per un problema di ottimizzazione?

7.2 Direzioni di discesa

Consideriamo il generico problema di ottimizzazione (1)

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x),$$

ed introduciamo il concetto di *direzione di discesa* che ci consentirà di fare un primo passo nella definizione delle condizioni di ottimalità.

Definizione 5 (Direzione di discesa) *Un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ è una* direzione di discesa *per la funzione $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto x se esiste uno scalare $\alpha^{\max} > 0$ tale che risulti:*

$$f(x + \alpha d) < f(x) \text{ per ogni } \alpha \in (0, \alpha^{(1)}_{\max}]. \tag{9}$$

In sostanza, se d è una direzione di discesa nel punto x, spostandosi da questo punto di una quantità α sufficientemente piccola, si è sicuri di ottenere un decremento della funzione f. La quantità α viene chiamata *spostamento* lungo la direzione d. Naturalmente, se lo spostamento α supera il limite $\alpha^{(1)}_{\max}$, può accadere che risulti $f(x + \alpha d) > f(x)$, e quindi si abbia un aumento, anzichè una diminuzione della funzione.

Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2, \tag{10}$$

e facciamo vedere che nel punto $x = (0, 0)$ la direzione $d = (-1, 0)$ è di discesa. Infatti si ha:

$$f(x) = f(0, 0) = 0;$$

inoltre risulta:

$$x + \alpha d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$f(x + \alpha d) = f(-\alpha, 0) = -\alpha + 2\alpha^2 = \alpha(2\alpha - 1).$$

Si verifica allora immediatamente che la condizione (9) è soddisfatta, prendendo ad esempio, $\alpha^{(1)}_{\max} = 0.4$; infatti, per ogni $\alpha \in (0, 0.4]$ si ha $f(-\alpha, 0) = \alpha(2\alpha - 1) < f(0, 0) = 0$. Si verifica inoltre che per $\alpha > \alpha^{\max} = 0.4$ la condizione $f(x + \alpha d) < f(x)$ non è necessariamente soddisfatta: se si prende $\alpha = 0.6$ si ha infatti $f(-0.6, 0) = 0.12 > f(0, 0) = 0$.

Nel caso di problemi di minimizzazione con due sole variabili di decisione, la direzione di discesa ha un'immediata interpretazione grafica. Se infatti rappresentiamo nel piano (x_1, x_2) le linee di livello della funzione f, osserviamo che, data una direzione di discesa in un punto x su una linea di livello, spostandoci lungo questa direzione, attraversiamo una zona di linee di livello corrispondenti a valori della funzione decrescenti rispetto a quello assunto in x; ciò significa muoversi *in discesa* rispetto alle linee di livello della funzione f.

Ad esempio, nella figura 5 sono rappresentate le linee di livello della funzione (10), e si vede che la direzione d è di discesa nel punto x^a.

La figura 5 mette bene in evidenza il carattere *locale* della definizione di direzione di discesa: una direzione d è di discesa *in un punto* x, e la discesa si verifica per spostamenti a partire da x *sufficientemente piccoli*. Dalla figura si vede che la stessa direzione d non è di discesa (è anzi di salita) nel punto x^b; inoltre se lo spostamento dal punto x^a è eccessivo, si ottiene un aumento, anzichè una diminuzione, della funzione.

Le direzioni di discesa sono caratterizzate dalla seguente condizione:

Teorema 10 *Condizione sufficiente affinchè la direzione d sia di discesa per la funzione $f(x)$ nel punto x è che risulti:*

$$\nabla f(x)^T d < 0. \tag{11}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che il termine $\nabla f(x)^T d$ risulta essere la *derivata direzionale* della funzione f nella direzione d; si ha cioè:

$$lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \nabla f(x)^T d.$$

Se al limite il rapporto a secondo membro è < 0, per α sufficientemente piccolo deve risultare $f(x + \alpha d) < f(x)$. □

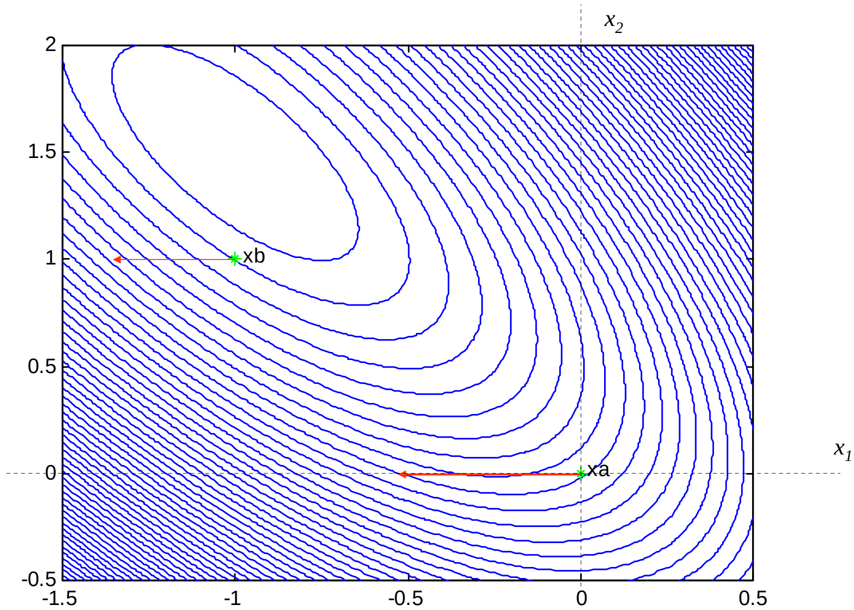

Figure 5: Curve di livello della funzione (10).

Una direzione d è *di salita* per la funzione $f(x)$ nel punto x se $-d$ è di discesa. Quindi, se risulta $\nabla f(x)^T d > 0$, la direzione d è di salita. Notiamo che se risulta $\nabla f(x)^T d = 0$ non è possibile dire, basandosi solo sulla conoscenza del gradiente $\nabla f(x)$, se d è di discesa o di salita.

Determinare una direzione che sia di discesa per una funzione $f(x)$ in un punto x è molto semplice. Infatti, presa una direzione d qualsiasi, purchè tale che $\nabla f(x)^T d \neq 0$, o risulta $\nabla f(x)^T d < 0$, e allora d è di discesa, o risulta $\nabla f(x)^T d > 0$, e allora $-d$ è di discesa. Ricordando che

$$\nabla f(x)^T d = \|\nabla f(x)\| \|d\| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\nabla f(x)$ e d, la condizione (11) esprime il fatto che la direzione deve formare un angolo ottuso con la direzione del gradiente. Quindi, in un punto x tale che $\nabla f(x) \neq 0$, la direzione $d = -\nabla f(x)$, detta dell'*antigradiente*, è sicuramente di discesa: infatti risulta:

$$\nabla f(x)^T d = \nabla f(x)^T(-\nabla f(x)) = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0.$$

Si lascia come esercizio verificare che, in un punto x tale che $\nabla f(x) \neq 0$, ogni direzione del tipo $d = -A\nabla f(x)$, ove A è una matrice $(n \times n)$ simmetrica e definita positiva, è sicuramente una direzione di discesa.

Ad esempio, nella figura 6 sono rappresentate le linee di livello della funzione (10), evidenziando il vettore gradiente nei due punti x^a e x^b.

Domande

1. Data la funzione (10), il punto $x = (0,0)$ e la direzione $d = (-1,0)$, in quale intervallo può variare il valore $\alpha^{\max}$?

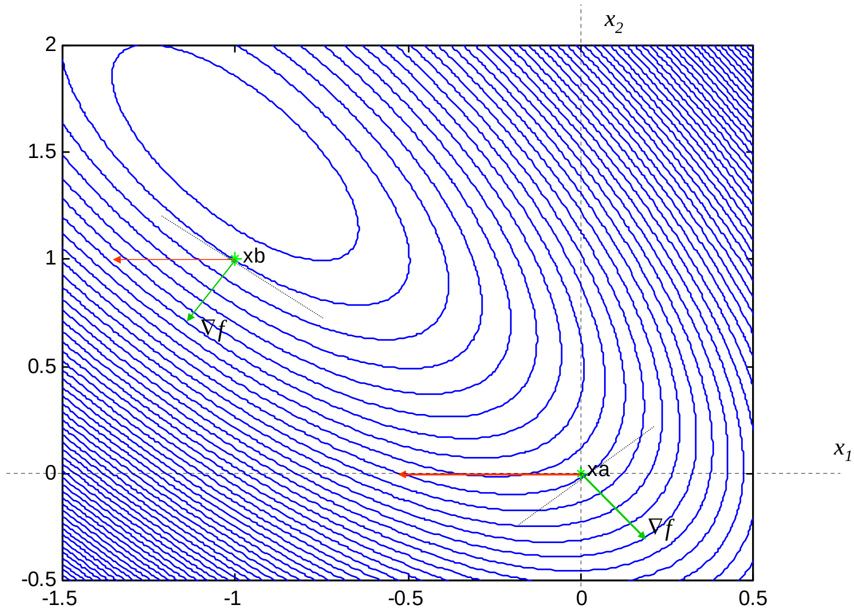

Figure 6: Curve di livello della funzione (10.

2. Per una funzione $f(x)$ due volte continuamente differenziabile, viene definito *curvatura* della funzione nel punto x e nella direzione d il termine $d^T \nabla^2 f(x) d$. Sai giustificare il fatto che, in un punto x^* in cui il gradiente della funzione è nullo, una direzione a curvatura negativa è una direzione di discesa? (Suggerimento: utilizza lo sviluppo $f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + o(\alpha^2)$).

7.3 Il caso non vincolato

Le condizioni di ottimalità per il problema di ottimizzazione non vincolata (2) sono note dal corso di Analisi Matematica, ma vengono qui riformulate, mettendo in evidenza il ruolo delle direzioni di discesa. È infatti evidente che, se x^* è un punto di minimo locale per $f(x)$, non può esistere una direzione d che sia di discesa per f in x^*; altrimenti, a partire da x^* ci si potrebbe muovere lungo d facendo diminuire la funzione, e x^* non potrebbe essere un punto di minimo.

Riscriviamo per comodità il problema non vincolato:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \tag{12}$$

Abbiamo innanzi tutto la seguente condizione necessaria di ottimalità:

Teorema 11 *Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del Problema (12) è che risulti* $\nabla f(x^*)^T d \geq 0,$ per ogni $d \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che, se esiste una direzione $\bar{d}$ tale che $\nabla f(x^*)^T \bar{d} < 0$, la direzione $\bar{d}$ è di discesa per f in x^*, e quindi x^* non può essere un punto di minimo locale per f. □

La condizione precedente è di grande importanza concettuale, ma non si presta in pratica a risolvere il Prolema (12), in quanto fa intervenire tutti i vettori d di $\mathbb{R}^n$. Una condizione di grande utilità pratica è invece la seguente.

Teorema 12 *Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del Problema (12) è che risulti $\nabla f(x^*) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che, se $\nabla f(x^*) \neq 0$, la direzione $d = -\nabla f(x^*)$ è di discesa per f in x^*. □

La condizione della proposizione precedente viene detta condizione necessaria *del primo ordine*. I punti che soddisfano $\nabla f(x) = 0$ vengono detti anche *punti stazionari*.

Se $f(x)$ è due volte continuamente differenziabile, vale anche la seguente condizione *del secondo ordine*:

Teorema 13 *Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del Problema (12) è che risulti $\nabla f(x^*) = 0$ ed inoltre che la matrice hessiana $\nabla^2 f(x^*)$ risulti semidefinita positiva.*

Dimostrazione. Se $\nabla^2 f(x^*)$ non è semidefinita positiva, esiste almeno una direzione $\bar{d}$ tale che $\bar{d}^T \nabla^2 f(x^*)\bar{d} < 0$. Tenendo conto del fatto che $\nabla f(x^*) = 0$, si ha dalla formula di Taylor:

$$f(x^* + \alpha\bar{d}) = f(x^*) + \frac{\alpha^2}{2}\bar{d}^T \nabla^2 f(x^*)\bar{d} + \ldots \text{(termini infinitesimi rispetto ad } \alpha^2\text{)},$$

e quindi:

$$lim_{\alpha\to 0+} \frac{f(x^* + \alpha\bar{d}) - f(x^*)}{\alpha^2} = \frac{1}{2}\bar{d}\nabla^2 f(x^*)\bar{d} < 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza mostra che, se $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ non è semidefinita positiva, esiste una direzione $\bar{d}$ di discesa in x^*, cosicchè x^* non può essere soluzione del Problema (12). □

Una condizione sufficiente di ottimalità è data dalla proposizione seguente:

Teorema 14 *Condizione sufficiente affinchè x^* sia una soluzione locale stretta del Problema (12) è che risulti $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva.*

Dimostrazione. Se $\nabla^2 f(x^*)$ è definita positiva, per qualsiasi direzione $d \neq 0$ risulta $d^T \nabla^2 f(x^*)d > 0$. Tenendo conto del fatto che $\nabla f(x^*) = 0$, si ha dalla formula di Taylor:

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \frac{\alpha^2}{2}d^T \nabla^2 f(x^*)d + \ldots \text{(termini infinitesimi rispetto ad } \alpha^2\text{)},$$

e quindi:

$$lim_{\alpha\to 0+} \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha^2} = \frac{1}{2}d\nabla^2 f(x^*)d > 0, \quad \text{per ogni } d \neq 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza mostra che, se $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ è definita positiva, risulta $f(x^* + \alpha d) > f(x^*)$ lungo qualsiasi direzione d, purché si assuma $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo. Quindi x^* è una soluzione locale stretta. □

Nel caso di funzione obiettivo $f(x)$ nel Problema (12) sia (strettamente) convessa in $\mathbb{R}^n$. Si può facilmete dimostrare che la condizione $\nabla f(x^*) = 0$ è non solo necessaria, ma anche sufficiente affinchè x^* sia una soluzione globale (stretta) del problema.

Teorema 15 (Condizione sufficiente di minimo globale non vincolato) *Sia $f : R^n \to R$ continuamente differenziabile su R^n e sia $x^* \in R^n$. Si supponga che f sia convessa. Se $\nabla f(x^\star) = 0$, allora x^* è un punto di minimo globale di f su R^n. Inoltre, se f è strettamente convessa su R^n, allora x^* è l'unico punto di minimo globale di f su R^n.*

Dimostrazione. Utilizzando la caratterizzazione di funzioni convesse espressa dal teorema 4), si può scrivere

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

da cui, se x^* è tale che $\nabla f(x^*) = 0$ si ottiene $f(x) \geq f(x^*)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. □

I risultati precedenti possono essere specializzati nel caso di funzioni quadratiche.

Teorema 16 *Sia $f(x) = \frac{1}{2}x'Qx + c'x$, con Q simmetrica e $c \in R^n$. Allora:*

(a) *$f(x)$ ammette un unico punto di minimo globale $x^* = -Q^{-1}c$ se e solo se Q è definita positiva;*

(b) *se Q è semidefinita positiva ogni punto x^* tale che $Qx^* + c = 0$ è un punto di minimo globale di $f(x)$;*

(c) *$f(x)$ ammette un punto di minimo se e solo se Q è semidefinita positiva ed esiste x^* tale che $Qx^* + c = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue banalmente osservando che nel caso quadratico risulta $\nabla f(x) = Qx + c$, $\nabla^2 f(x) = Q$. Ricordando che $Q \succ 0$ se e solo se $f(x)$ è coerciva e strettamente convessa, segue la a). Se $Q \succeq 0$ risulta $f(x)$ convessa e quindi la condizione $\nabla f(x^*) = 0$ è necessaria e sufficiente di minimo globale (ed è dimostrata la b)).
La parte necessaria della c) segue dalle condizioni già date, mentre per la parte sufficiente si osserva che nel caso quadratico risulta

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha(Qx^* + c)^T d + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T Q d.$$

Quindi se $Qx^* + c = 0$ e $d^T Q d \geq 0$ per ogni $d \in R^n$ si ottiene $f(x^* + \alpha d) \geq f(x^*)$ per ogni $\alpha \in R$ e ogni $d \in R^n$. □

Domande

1) Quali sono le condizioni di ottimalità per il problema $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$?

7.4 Esempi sulle condizioni di ottimo non vincolato

Esempio 6 *Sia data la funzione dell'Esempio 3*

$$f(x_1, x_2) = {x_1}^4 + {x_2}^4 - 3x_1x_2.$$

Studiare la natura degli eventuali punti stazionari.

Soluzione. Abbiamo già verificato nell'Esempio 3 che la funzione ammette almeno un minimo globale che si trova tra i punti che annullano il gradiente. Quindi imponiamo

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 3x_2 \\ 4x_2^3 - 3x_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Applichiamo le condizioni necessarie del primo ordine; dall'annullamento del gradiente si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 3x_2 = 0 \\ 4x_2^3 - 3x_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2\left(\frac{256}{27}x_2^8 - 3\right) = 0 \\ x_1 = \frac{4}{3}x_2^3 \end{cases}$$

Si ottengono le tre soluzioni: $A(0,0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Tra queste c'è senz'altro il minimo globale.
Le curve di livello della funzione sono nella Figura 7 da cui si individuano i tre punti stazionari.

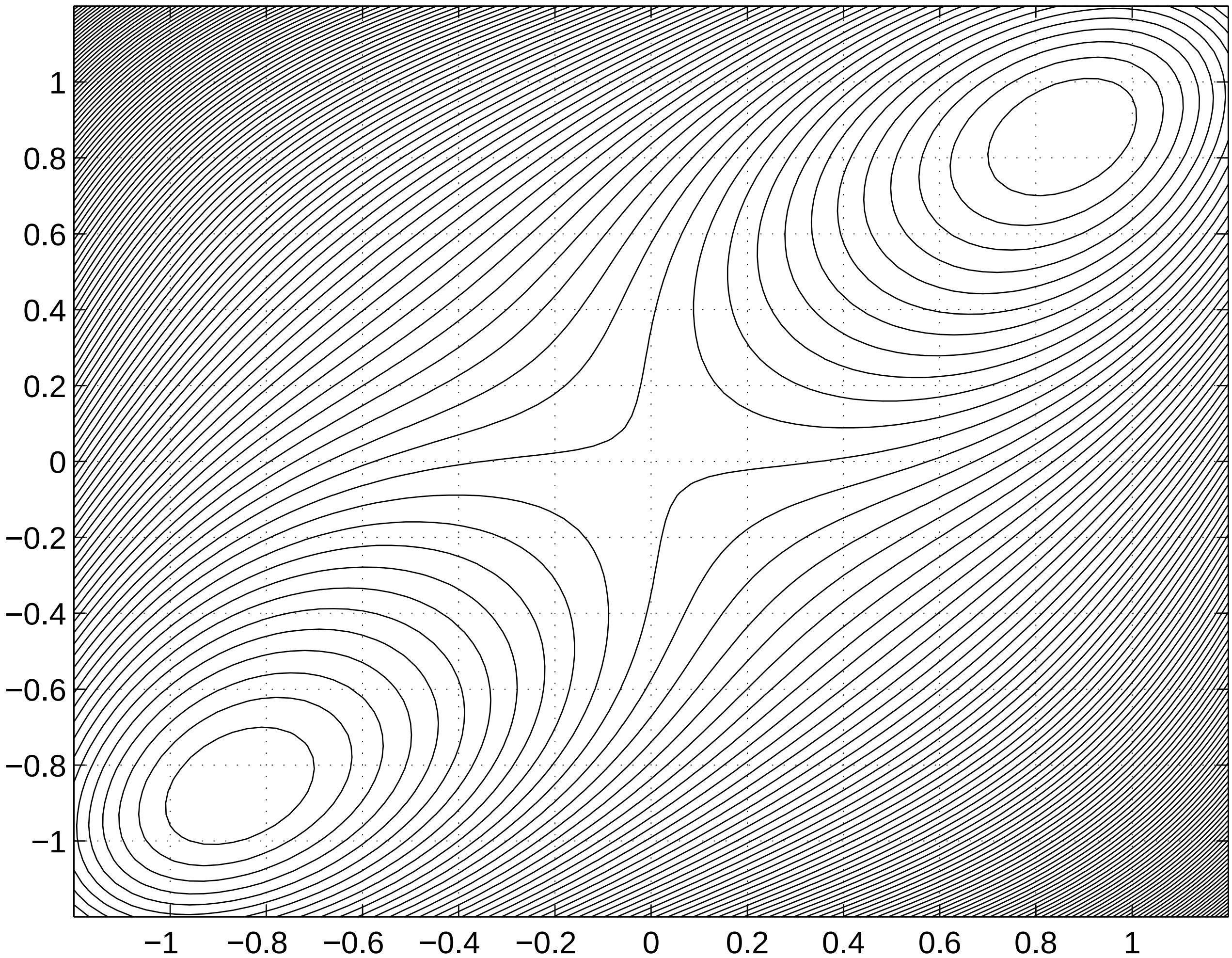

Figure 7: Curve di livello della funzione $x_1^4 + x_2^4 - 3x_1x_2$.

Per determinare la natura di A, B, C utilizziamo le condizioni del secondo ordine. Calcoliamo la matrice hessiana

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -3 \\ -3 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Risulta nei tre punti:

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi in A la matrice hessiana è indefinita con autovalori $\lambda_{\min} = -3$, $\lambda_{\max} = 3$. Si tratta quindi di un punto di sella con valore della funzione $f(0,0) = 0$.
Nei punti $B, C = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ abbiamo

$$\nabla^2 f = 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice hessiana è definita positiva con autovalori $\lambda_{\min} = 2$, $\lambda_{\max} = 4$. Si tratta quindi di due punti di minimo globale di valore della funzione obiettivo $f = -\frac{9}{8}$.

Esempio 7 *Mostrare che le funzioni*

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^3$$

e

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4,$$

hanno entrambe un punto stazionario in $(0,0)$*, con hessiano semidefinito positivo, ma* $(0,0)$ *è un punto di sella per* $f(x_1, x_2)$ *e un punto di minimo locale stretto per* $g(x_1, x_2)$*.*

Soluzione. Abbiamo

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 4x_2^3 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 g = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che il punto $(0,0)$ è stazionario per f e g; inoltre soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine. In particolare risulta

$$\nabla^2 f(0,0) = \nabla^2 g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Per determinare la reale natura del punto, consideriamo lo sviluppo delle funzioni f, g in un punto ξ nell'intorno del punto $(0,0)$. Ricordiamo che per una generica funzione h risulta (teorema della media):

$$h(x + \xi) = h(x) + \nabla h(x)^T \xi + \frac{1}{2}\xi^T \nabla^2 h(w)\xi$$

in cui $w \in (x, x + \xi)$. Tenendo presente che $f(0,0) = g(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = \nabla g(0,0) = (0,0)^T$ per f e g si può scrivere

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\xi^T \nabla^2 f(\theta_1 \xi)\xi,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\xi^T \nabla^2 g(\theta_2 \xi)\xi.$$

con $\theta_1 \in (0,1)$, $\theta_2 \in (0,1)$.
Si verifica facilmente che $\xi^T \nabla^2 g(\theta_2 \xi)\xi > 0$ qualunque sia $\xi \neq (0,0)^T$ e quindi $g(\xi) > g(0,0) = 0$ per ogni ξ in un intorno di $(0,0)^T$.

Mentre per $\xi^T \nabla^2 f(y)\xi$ abbiamo che punti ξ con componente ξ_2 negativa, rendono l'hessiano $\nabla^2 f$ indefinito e quindi esistono punti appartenenti ad un intorno di $(0,0)$ per cui $f(\xi) > 0$ e altri per cui $f(\xi) < 0$. Si tratta quindi di un punto di sella. □

Esempio 8 *Sia data la funzione*

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

Studiare l'esistenza e la natura di eventuali punti estremali.

Soluzione. Si tratta di una funzione quadratica. La funzione non é coerciva. Infatti, possiamo scrivere $q(x) = (x_1 - x_2)^2$. Quindi se consideriamo come direzione $x_1 = x_2$, la funzione é identicamente nulla e quindi

$$\lim_{\|x\|\to\infty} q(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Osserviamo che, in questo caso, se consideriamo separatamente i limiti

$$\lim_{\|x\|\to\infty} (x_1 - \bar{x}_2)^2 = \infty$$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} (\bar{x}_1 - x_2)^2 = \infty$$

In cui $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono rispettivamente dei valori fissati di x_1 e x_2, otteniamo che la funzione va ad infinito separatamente lungo le due componenti. Questo non implica che la funzione sia coerciva.
Osserviamo infatti che si tratta di funzione quadratica con matrice hessiana semidefinita positiva con autovalori pari a $\lambda_{\min} = 0$ e $\lambda_{\max} = 1$.
Utilizzando il Teorema 16, sappiamo che che esiste un punto di minimo globale se e solo se esiste una soluzione del sistema $\nabla q(x) = 0$, cioé

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{aligned}$$

In particolare, in questo caso sono minimi globali tutti i punti sulla retta $x_1 = x_2$, cioè del tipo $(\xi, \xi)^T$.

Esempio 9 *Sia data la funzione quadratica*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$$

Trovare, se esiste, il minimo globale.

Soluzione. L'annullamento del gradiente conduce al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice hessiana

$$\nabla^2 q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poichè $\nabla^2 f$ è non singolare e definita positiva, l'unica soluzione del sistema $\nabla q = 0$ è l'unico punto di minimo globale $x = (0,\ 0,\ 0)^T$.

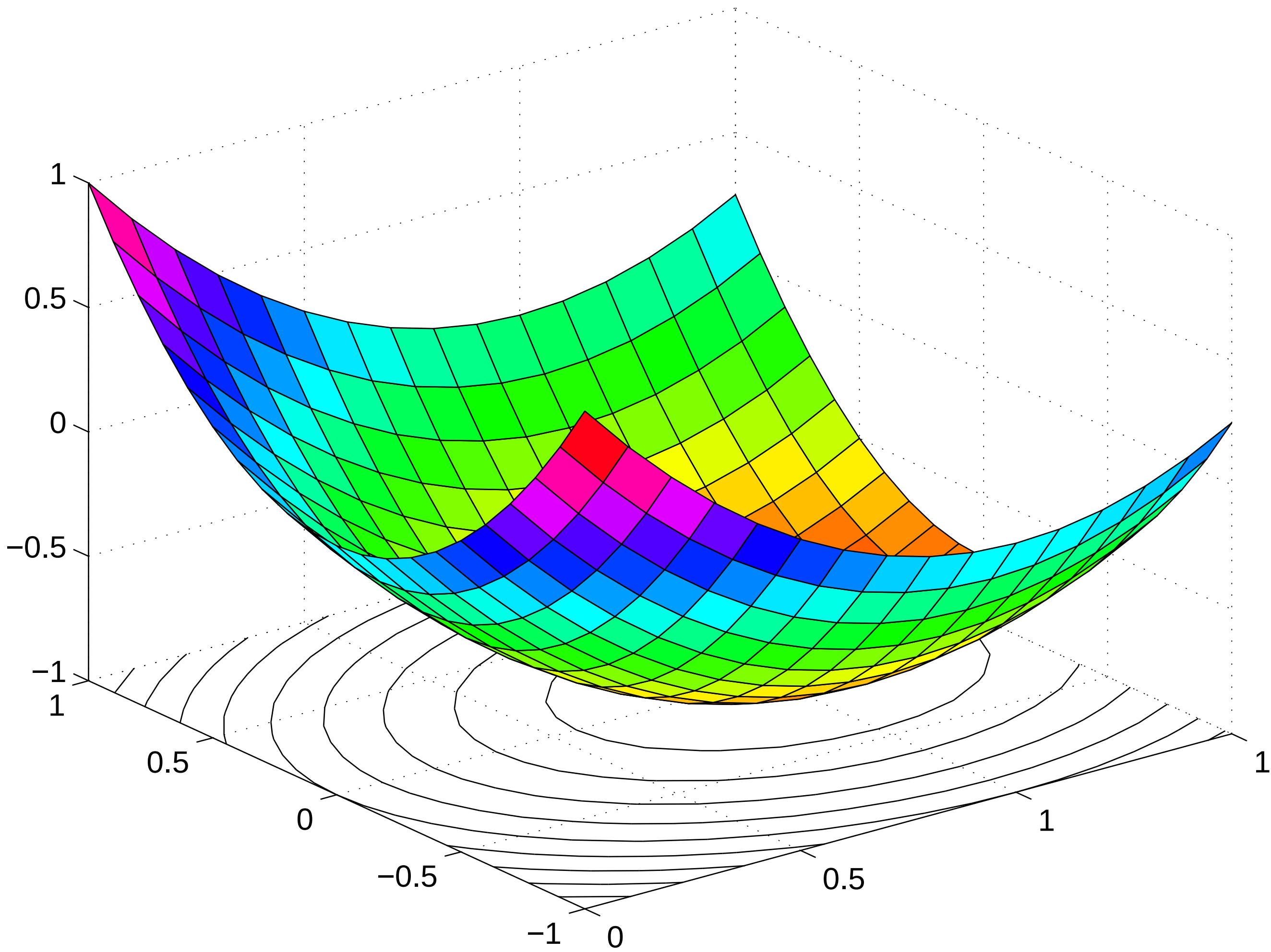

Figure 8: Grafico di $q(x_1, x_2)$ per $\alpha = \beta = 1$.

Esempio 10 [2] *Sia data la funzione*

$$q(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2) - x_1.$$

Studiare le esistenza e la natura dei punti estremali al variare dei parametri α e β.

Soluzione.

Scriviamo il gradiente e la matrice hessiana di q. Si ha

$$\nabla q = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - 1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, allora esiste un unica soluzione al sistema $\nabla q = 0$ ed é $\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)^T$. Inoltre la matrice $\nabla^2 q$ é definita positiva; si tratta quindi dell'unico punto di minimo globale.
Se $\alpha = 0$ e β é qualsiasi, non esiste soluzione al sistema $\nabla q = 0$. Notare che se $\beta \geq 0$ la matrice é semidefinita positiva, ma questo non assicura l'esistenza del minimo globale.

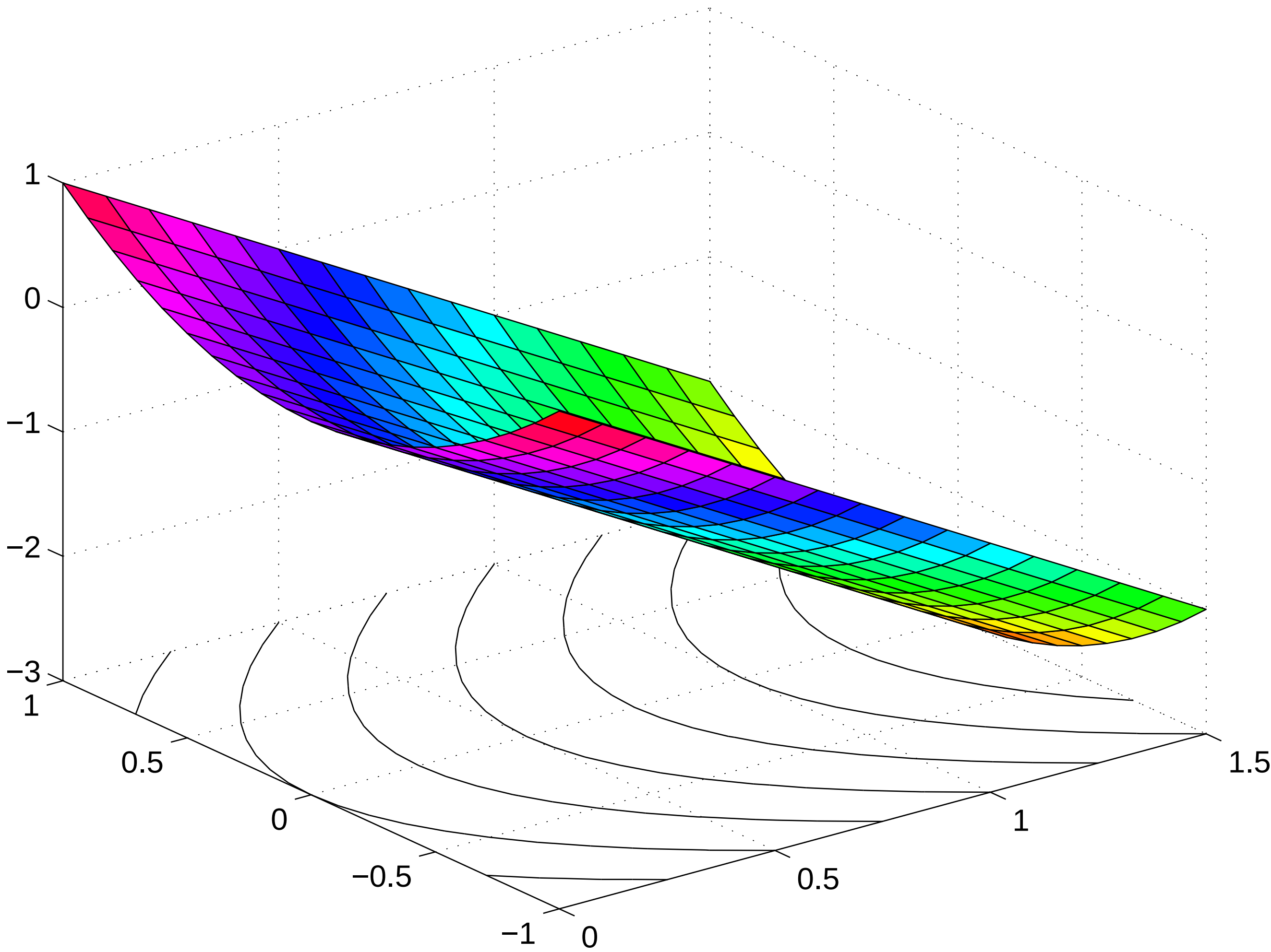

Figure 9: Grafico di $q(x_1, x_2)$ per $\alpha = 0$ $\beta = 1$.

Se $\alpha > 0$ e $\beta = 0$, esistono infinite soluzioni al sistema $\nabla q = 0$ ed é $\left(\frac{1}{\alpha}, \xi\right)^T$ con ξ qualsiasi. Inoltre la matrice $\nabla^2 q$ é semidefinita positiva; si tratta quindi di infiniti punti di minimo globale.

Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ si ha un'unica soluzione $(\frac{1}{\alpha}, 0)$. Ma la matrice hessiana é indefinita; si tratta quindi di un punto di sella.

Nel caso di $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, allora esiste un unica soluzione al sistema $\nabla q = 0$ ed é $\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)^T$. Inoltre la matrice $\nabla^2 q$ é definita negativa; si tratta quindi dell'unico punto di massimo globale.

Esempio 11 *Sia data la funzione*

$$q(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2.$$

Studiare la natura degli eventuali punti estremali.

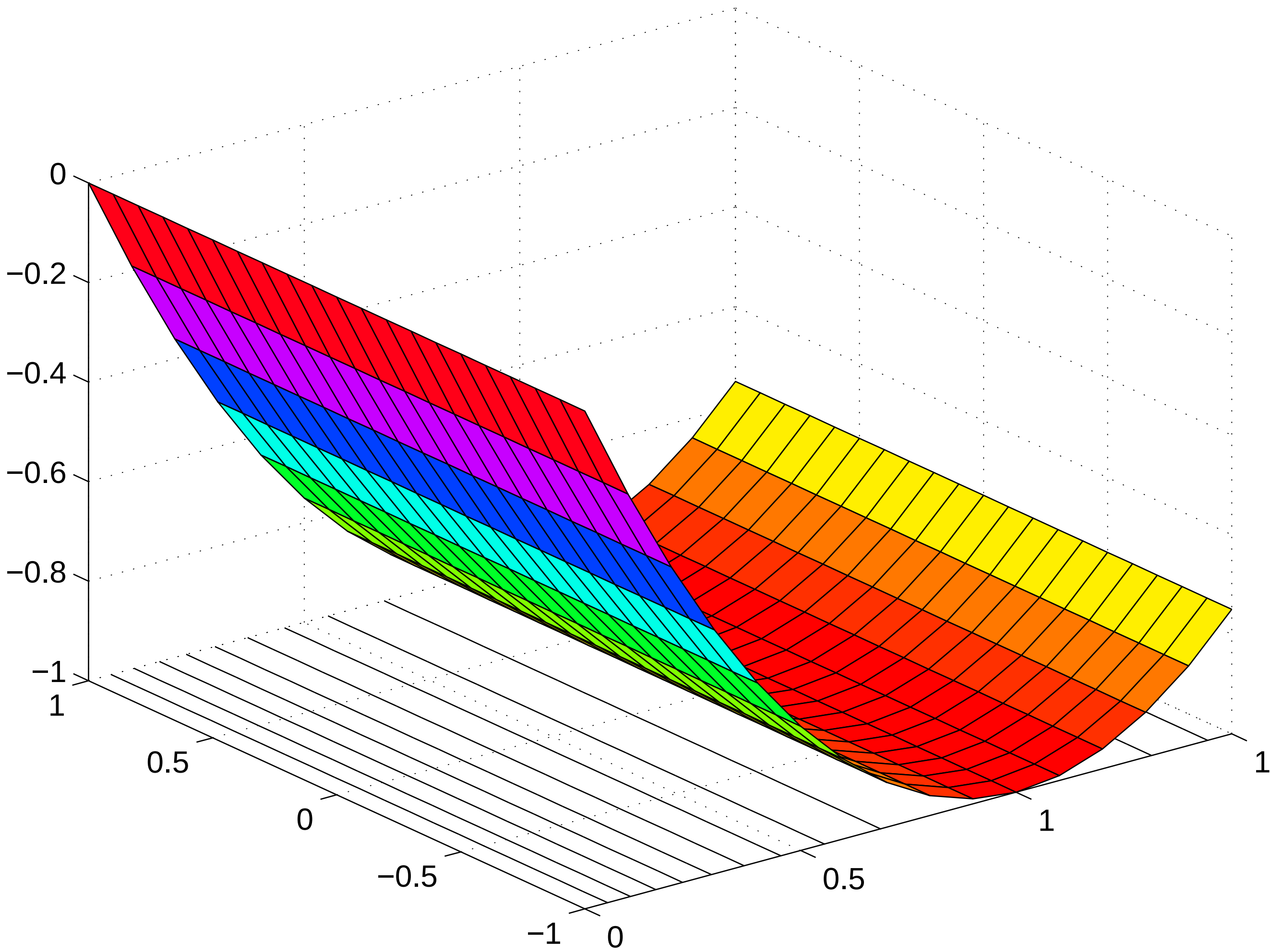

Figure 10: Grafico di $q(x_1, x_2)$ per $\alpha = 1$ $\beta = 0$.

Soluzione. Risulta

$$\nabla q(x) = Qx + c = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_2 + 2x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice Q è definita positiva. Infatti $\lambda_{\min} = 3 - \sqrt{5}$ e $\lambda_{\max} = 3 + \sqrt{5}$. Esiste quindi un'unica soluzione ottima che si ottiene annullando il gradiente:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_2 + 2x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Si ottiene la soluzione

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

con valore $q(x^*) = -5/4$.

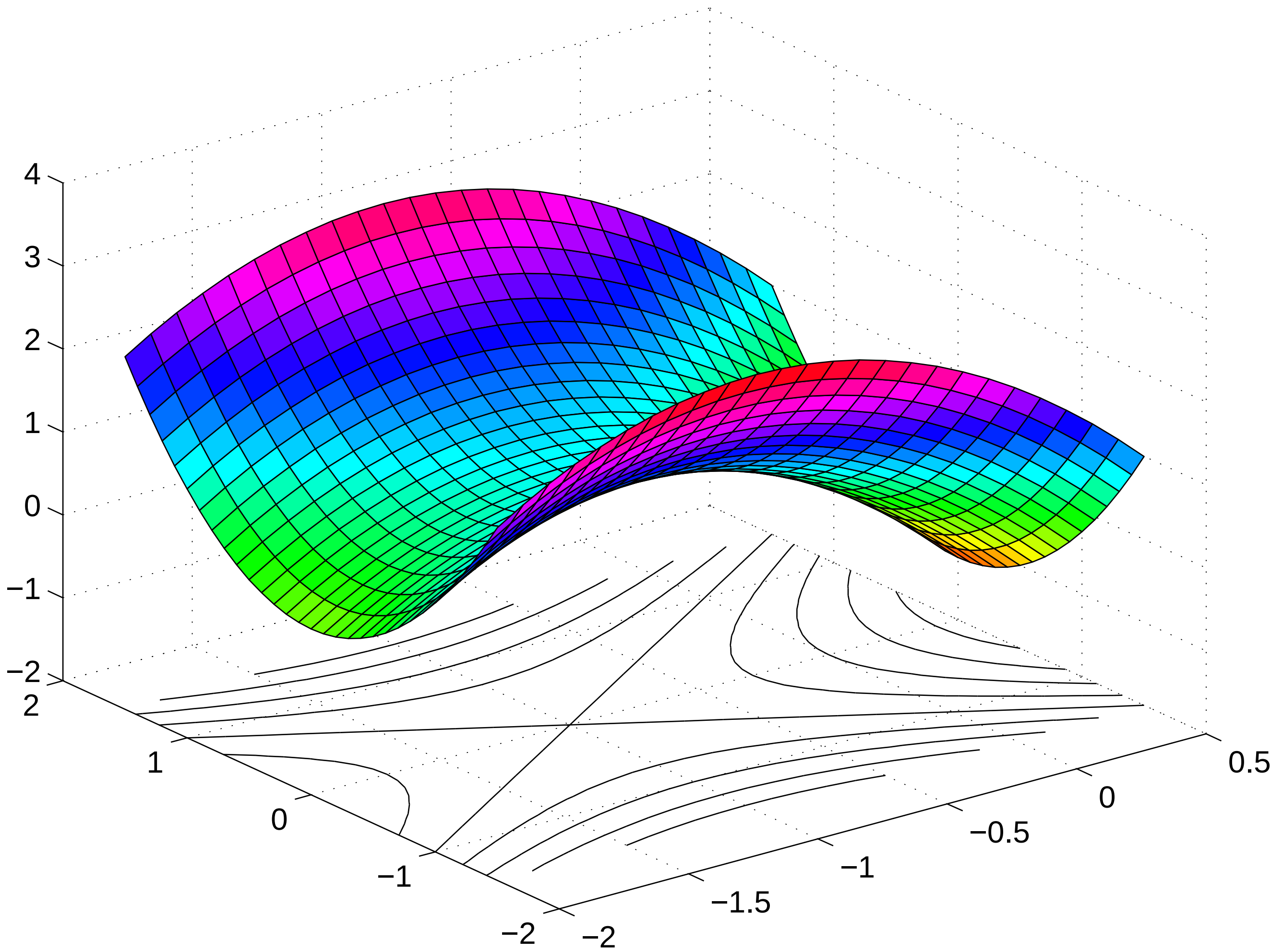

Figure 11: Grafico di $q(x_1, x_2)$ per $\alpha = -1$ $\beta = 1$.

Esempio 12 (Discriminazione del prezzo [1]) *Un monopolista che produce un unico bene ha due tipi di clienti A e B. Siano Q_A e Q_B le quantità offerte dal monopolista ai due clienti. I clienti di tipo A sono disposti a pagare il prezzo $P_A = f_A(Q_A) = 50 - 5Q_A$ e i clienti di tipo B sono disposti a pagare il prezzo $P_B = f_B(Q_B) = 100 - 10Q_B$. Il costo di produzione dipende solo dalla quantità di prodotto finale $Q = Q_A + Q_B$ ed è $C = 90 + 20Q$. Definire il modello di ottimizzazione.*

Soluzione. Il profitto (ricavo-costi)è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} f(Q_A, Q_B) &= Q_A P_A + Q_B P_B - [90 + 20(Q_A + Q_B)] \\ &= (50 - 5Q_A)Q_A + (100 - 10Q_B)Q_B - 90 - 20(Q_A + Q_B) \end{aligned}$$

e deve essere massimizzato. Raggruppando e portando in forma standard di minimizzazione, si ottiene il problema

$$\min \quad 5x_1^2 + 10x_2^2 - 30x_1 - 80x_2 - 90$$

avendo indicato con $x_1 = Q_A$ e $x_2 = Q_B$[1].

[1]Notiamo che sono impliciti i vincoli $x \geq 0$.

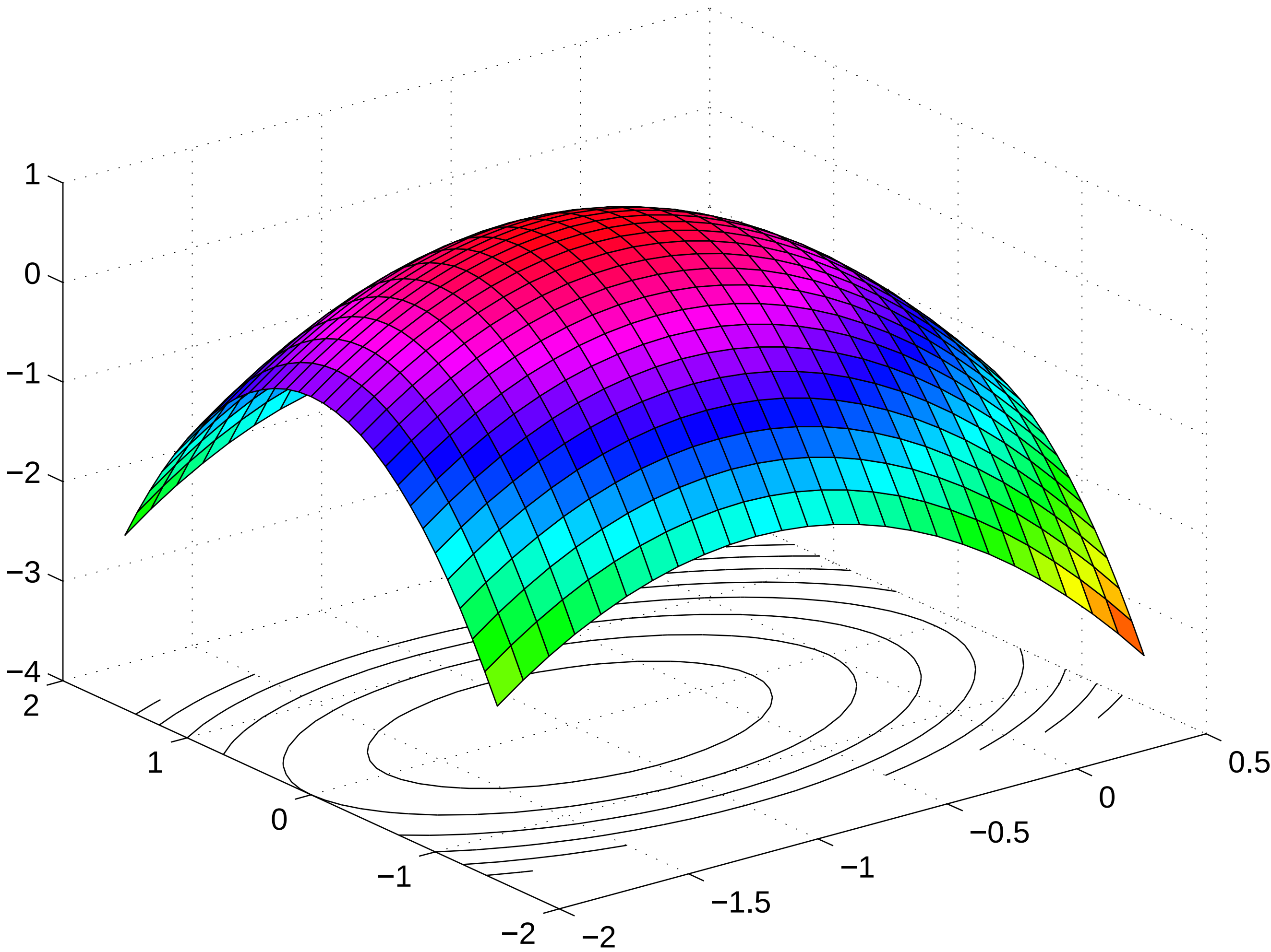

Figure 12: Grafico di $q(x_1, x_2)$ per $\alpha = \beta = -1$.

Si tratta di un problema quadratico con

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 10x_1 - 30 \\ 20x_2 - 80 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

La matrice hessiana è definita positiva, esiste un unico punto di minimo globale che si ottiene dall'annullamento del gradiente. □

Esercizio 4 *[parte del compito d'esame del 15-9-2003] Dato il problema di programmazione non lineare vincolato*

$$\min 3x_1^2 x_3 - 27x_1 + x_3^3 + 2x_3 x_2^2$$

Dire quali condizioni necessarie soddisfa il punto $x^* = (3/2, 0, -3)^\top$.

Esercizio 5 *[parte del compito d'esame del 15-9-2003] Dato il problema di programmazione non lineare non vincolato*

$$\min 2x_1^2 + 7x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1$$

Dire se esiste un punto di minimo (senza determinarlo !).

Esercizio 6 *Determinare, se esiste, il punto di minimo della funzione*

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$$