7.8 Analisi di sensibilità per vincoli di uguaglianza

Una volta determinata una soluzione x^* del Problema (37), risulta di notevole interesse avere indicazioni su come varia il valore ottimo della funzione obiettivo $f(x^*)$, se si effettuano (piccole) variazioni dei dati del problema. L'analisi di queste variazioni viene detta *analisi di sensibilità*. Di particolare interesse risulta l'analisi di sensibilità rispetto al secondo membro di un vincolo di uguaglianza $h_j(x) = 0$, in quanto mette in evidenza una fondamentale proprietà del moltiplicatore μ_j^*.

Sia x^* una soluzione del problema (37), $f(x^*)$ il valore ottimo della funzione obiettivo. Vogliamo analizzare cosa accade al valore ottimo della funzione obiettivo se il secondo membro del vincolo varia da 0 a un valore ϵ. L'analisi che si vuole effettuare si riferisce quindi alla perturbazione del Problema (37) del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ & h_j(x) = \epsilon_j \quad j = 1,\dots,m \end{array}$$

ovvero in forma vettoriale

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ & h(x) = \epsilon \end{array} \tag{46}$$

con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed $\epsilon \in \mathbb{R}^m$. Vogliamo cioè analizzare la relazione tra la soluzione trovata per il Problema (37) e quella del problema perturbato, la cui funzione Lagrangiana è data, mettendone in evidenza la dipendenza da ϵ, da:

$$L(x, \mu; \epsilon) = f(x) + \mu^T (h(x) - \epsilon).$$

A titolo di esempio consideriamo il problema con un solo vincolo lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

la cui soluzione ottima è $x^* = (1/2\ 1/2)^T$ di valore $f(x^*) = 1/2$, con moltiplicatore $\mu^* = -1$, ottenuta risolvendo il sistema delle condizioni necessarie di Lagrange

$$\begin{array}{l} 2x_1^* + \mu^* = 0 \\ 2x_2^* + \mu^* = 0 \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{array}$$

Supponiamo di perturbare il termine noto di ϵ e consideriamo il nuovo vincolo $x_1 + x_2 = 1 + \epsilon$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$. Se un punto $x^*(\epsilon)$ è ottimo per il problema perturbato (PP) allora esiste un $\mu^*(\epsilon)$ tale che

$$\begin{array}{l} 2x_1^*(\epsilon) + \mu^*(\epsilon) = 0 \\ 2x_2^*(\epsilon) + \mu^*(\epsilon) = 0 \\ x_1^*(\epsilon) + x_2^*(\epsilon) = 1 + \epsilon \end{array}$$

Risolvendo si ottiene la soluzione

$$x_1^*(\epsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad x_2^*(\epsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \mu^*(\epsilon) = -1 - \epsilon.$$

La funzione obiettivo in questo punto vale

$$f(x^*(\epsilon)) = \frac{1}{2} + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} = f(x^*) - \mu^*\epsilon + o(\epsilon).$$

Ovvero la differenza $f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)$ ha un andamento che, in prima approssimazione, è del tipo $-\mu^*\epsilon$. Questa considerazione può essere generalizzata.

Indichiamo con $x^*(\epsilon)$ una soluzione del problema (46) e con $\mu^*(\epsilon)$ il corrispondente moltiplicatore. Per $\epsilon = 0$ abbiamo $x^*(0) = x^*$ e $\mu^*(0) = \mu^*$. Vogliamo studiare l'andamento della funzione $f(x^*(\epsilon))$ per piccole variazioni di ϵ nell'intorno di $\epsilon = 0$. A tale scopo possiamo premettere il seguente risultato, che si riporta senza dimostrazione.

Teorema 27 *Sia dato il problema (37) e siano x^*, μ^* rispettivamente una soluzione e il corrispondente moltiplicatore. Supponiamo che x^* sia un punto regolare e che (x^*, μ^*) soddisfino le condizioni sufficienti del 2^o ordine. Si consideri una famiglia di problemi (46), ovvero*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = \epsilon, \end{aligned}$$

parametrizzata dal vettore $\epsilon \in \mathbb{R}^m$.
Allora esiste un intorno $\mathcal{S}$ di $\epsilon = 0$ tale che per ogni $\epsilon \in \mathcal{S}$

1. *esistono un $x^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, \mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^m$ che sono soluzione e corrispondente moltiplicatore del problema (46);*
2. *risulta $x^*(0) = x^*, \mu^*(0) = \mu^*$;*
3. *$x^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, \mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^m$ sono funzioni di ϵ continuamente differenziabili in S.*

Nel seguito, per semplificare l'analisi facciamo dapprima riferimento ad un problema con un solo vincolo di uguaglianza:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

con $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la cui soluzione è x^* con moltiplicatore $\mu^* \in \mathbb{R}$.

Il problema perturbato è:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = \epsilon, \end{aligned} \tag{48}$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Indichiamo con $x^*(\epsilon)$ una soluzione del Problema (48) e $\mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}$ il corrispondente moltiplicatore, che, nelle ipotesi del Teorema 27 esistono e sono funzioni di ϵ continuamente differenziabili in un intorno di $\epsilon = 0$. Inoltre per $\epsilon = 0$ abbiamo $x^*(0) = x^*$ e $\mu^*(0) = \mu^*$.

Possiamo ora ottenere indicazioni su come varia $f(x^*(\epsilon))$ per piccole variazioni di ϵ, nell'intorno di $\epsilon = 0$. Infatti, poiché le funzioni $f(x^*(\epsilon))$ e $x^*(\epsilon)$ sono continuamente differenziabili rispetto ad ϵ (almeno in un intorno S di $\epsilon = 0$), possiamo scrivere la formula di Taylor troncata ai termini del primo ordine:

$$f(x^*(\epsilon)) - f(x^*(0)) = \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)} \epsilon + o(\epsilon).$$

Quindi per avere informazioni sull'andamento $f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)$ si deve determinare il termine $\displaystyle\frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)}$.

Tale determinazione non è immediata in quanto la relazione tra $x^*(\epsilon)$ e $f(x^*(\epsilon))$ si ottiene solo risolvendo il problema (46). Per superare questa difficoltà, possiamo utilizzare la funzione Lagrangiana per il problema (46) che è data da:

$$L(x, \mu, \epsilon) = f(x) + \mu(h(x) - \epsilon).$$

Calcolata in $(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon))$, si ottiene

$$L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon) = f(x^*(\epsilon)) + \mu^*(\epsilon)(h(x^*(\epsilon)) - \epsilon) = f(x^*(\epsilon)),$$

in quanto in $x^*(\epsilon)$ il vincolo del problema perturbato deve essere soddisfatto. Da cui si ottiene che

$$\frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)} = \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)}$$

Si tratta quindi di determinare l'espressione di $\frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)}$. Si tratta di una funzione composta, e quindi si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)} &= \left[\nabla_x L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)^T \frac{dx^*(\epsilon)}{d\epsilon}\right]_{(\epsilon=0)} \\ &+ \left[\frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \mu} \frac{d\mu^*(\epsilon)}{d\epsilon}\right]_{(\epsilon=0)} + \frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$[\nabla_x L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)]_{(\epsilon=0)} = \nabla_x L(x^*(0), \mu^*(0), 0) = \nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0$$

perché x^*, μ^* soddisfano le condizioni di Lagrange; inoltre

$$\frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \mu}_{(\epsilon=0)} = h(x^*(0)) = h(x^*) = 0$$

in quanto x^* è ammissibile. Inoltre dall'espressione della funzione Lagrangiana per il problema perturbato, possiamo scrivere

$$\frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon} = -\mu^*(\epsilon).$$

Otteniamo quindi

$$\frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{(\epsilon=0)} = -\mu^*(0) = -\mu^*. \tag{49}$$

Possiamo allora scrivere:

$$f(x^*(\epsilon)) = f(x^*) - \mu^*\epsilon + o(\epsilon),$$

e cioè, per piccoli valori di ϵ, possiamo dire

$$\frac{f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)}{\epsilon} \simeq -\mu^*. \tag{50}$$

Questo risultato si esprime dicendo che il moltiplicatore μ^*, cambiato di segno, fornisce il *coefficiente di sensibilità* del valore ottimo della funzione obiettivo rispetto a variazioni del termine noto del vincolo.

Questa interpretazione del moltiplicatore μ^* è di grande utilità pratica. Infatti se risulta $\mu^* > 0$ ci si può aspettare che, per piccoli valori di $\epsilon > 0$ risulti $f(x^*(\epsilon)) < f(x^*)$. Si può allora risolvere il Problema (48) con un valore ϵ assegnato, per verificare se il *beneficio*, espresso dalla differenza $f(x^*) - f(x^*(\epsilon))$ compensa il *costo* da sostenere per variare da 0 ad ϵ il secondo membro del vincolo [2].

Nel caso in cui i vincoli siano m e siano μ_j^* il moltiplicatore associato al vincolo h_j, e ϵ_j la variazione del termine noto dello stesso vincolo, possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$f(x^*(\epsilon)) = f(x^*(0)) + \nabla_\varepsilon^T f(x^*(\epsilon)) \mid_{(\epsilon=0)} \epsilon + o(\epsilon),$$

dove $\nabla_\varepsilon f(x^*(\epsilon))$ è il vettore di $\mathbb{R}^m$ che denota le derivate parziali prime rispetto a ε_j con $j = 1 \ldots, m$. Otteniamo quindi la relazione:

$$f(x^*(\epsilon)) - f(x^*) \simeq -\sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \epsilon_j.$$

[2] Ad esempio, in un problema di allocazione di risorse, il vincolo esprime una limitazione sulla disponibilità di risorse; effettuando l'analisi di sensibilità si può valutare se è conveniente aumentare o diminuire la disponibilità.