

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)
11 febbraio 2013

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (4.5 punti) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^3} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 - 2x_2 + x_3$$

- (i) **(1,5 punto)** Dire se la funzione è/non è (strettamente) convessa giustificando la risposta.
- (ii) **(1,5 punti)** Determinare, se esistono, i minimi globali giustificando la risposta.
- (iii) **(1,5 punto)** Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(0, 0, 0)^T$.

Esercizio 2. (6 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\min x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (i) **(0.5 punti)** Dire se uno dei minimi non vincolati determinati nell'esercizio precedente può/non può essere minimo.
- (ii) **(0.5 punti)** Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.
- (iii) **(2,5 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (2, 0, 1)^T$.
- (iv) **(2,5 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (2, 0, 1)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il poliedro

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Dato il punto $\hat{x} = (2, 0, 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} .
- (ii) **(0,5 punto)** Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b, x \geq 0$ con $b \geq 0$).
- (iii) **(3 punti)** Scrivere i vertici del poliedro originale e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.
- (iv) **(2 punti)** Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Considerato poi l'obiettivo $\min \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 - x_3$, scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 - x_3 \\ & 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Scrivere il problema duale.
- (ii) **(2 punti)** Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) **(3 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- (iv) **(2 punti)** Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da $\frac{5}{2}$ a $\frac{5}{2} + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Si consideri il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq \frac{5}{2} \\ & -4x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

Sia $\hat{x} = (0, 1)^T$ una soluzione ammissibile intera. Utilizzando la soluzione grafica, se necessario, rispondere ai seguenti quesiti.

- (i) **(0,5 punti)** Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;
- (ii) **(0,5 punti)** dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scegliere una variabile di branching e scrivere i primi due problemi generati per separazione rispetto a tale variabile;
- (iii) **(2 punti)** indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le eventuali soluzioni ottime dei due sottoproblemi;
- (iv) **(2 punti)** scegliere uno dei due problemi e analizzarlo (dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro).