1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (9 cfu)

12 gennaio 2010

Cognome	Nome	
Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni		VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (**4,5 punti**)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{x \in I\!R^3} \; x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

(i) (**2 punti**) Dire se la funzione è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.

(ii) (**0,5 punti**) Dire se il punto $(0, \; 0, \; 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo.

(ii) (**1.5 punto**) Discutere l'esistenza/non esistenza di minimi globali della funzione.

(iv) (**0,5 punti**)Dire se nel punto $(0, \; 0, \; 0)^T$ la direzione $d = (-1 \; , -2, \; -1)^T$ è di discesa, giustificando la risposta.

Esercizio 2. (**5 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se il problema è convesso

(ii) (**2.5 punti**) Dire se nel punto $(1, \; 1, \; 0)^T$ esistono direzioni ammissibili e di discesa e il passo e calcolare una con il corrispondente valore di $\alpha_{\max}$

(iii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT e dire se nel punto $(1, \; 0, \; \frac{5}{2})^T$ sono/non sono verificate.

Esercizio 3. (**6 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**0,5 punto**) Porre il problema in forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso.

(ii) (**3,5 punti**) Individuare tutte le Soluzione di Base Ammissibile del poliedro in forma standard. Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare le variabili di base e fuori base con la matrice di base corrispondente.

(iii) (**2 punti**) Calcolare i coefficenti di costo ridotto nella SBA considerata al passo precedente.

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**3,5 punti**) Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.

(ii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare, se esiste, la soluzione ottima del problema primale.

(iii) (**2 punti**) Dire se e come cambia la soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 2 a $2 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Esercizio 3 (5 punti)

Utilizzando il metodo del Branch and Bound determinare una soluzione del seguente problema di Knapsack:

$$
\begin{aligned}
& \max 6x_1 + 4x_3 + 0.8x_4 + 6x_5 + 1.4x_6 + 0.8x_7 \\
& 2x_1 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 \leq 7 \\
& x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 7.
\end{aligned}
$$

Esercizio 6 (2.5 punti)

Dato il grafo di figura 2, effettuare una numerazione topologica dei nodi e determinare l'albero dei cammini minimi.

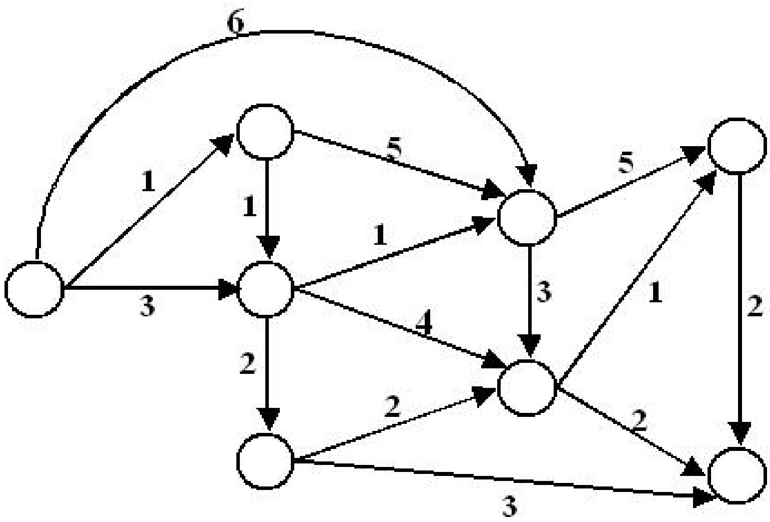

Figure 1: Grafo di esercizio

Soluzione

Esercizio 1. (**4,5 punti**)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si tratta di verifica se $\nabla^2 f \succeq 0$. Il determinante è nullo, i minori di ordine uno sono gli elementi sulla diagonale e sono non negativi, i minori di ordine due sono:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque $\nabla^2 f \succeq 0$ e la funzione è convessa ma non strettamente convessa.

(ii) Non soddisfa; risulta infatti

$$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

(iii) Si tratta di una funzine quadratica convessa. Dunque ammette minimo se e solo se il sistema $\nabla f(x) = 0$ ammette soluzione. La funzione non ammette minimo in quanto il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzione perché la seconda equazione non può mai essere soddisfatta da punti che soddisfano la prima e la terza.

(iv) Sí la direzione è di discesa in quanto $d = -\nabla f(0)$ e dunque $\nabla f(0)^T d = -\|\nabla f(0)\|^2 = -4 < 0$.

Esercizio 2.

(i) Il problema è convesso perché la funzione obiettivo quadratica è convessa (NB è la stessa funzione dell'esercizio precedente) e i vincoli sono lineari. Dunque si tratta della minimizzazione di una funzione convessa su un poliedro convesso.

(ii) Nel punto $\hat{x} = (1,\ 1,\ 0)^T$ sono attivi i vincoli $\{1, 5\}$ e il gradiente vale $\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$, dunque il sistema da risolvere (NB: il prmo vincolo é di uguaglianza)

$$\begin{cases} d_1 + 5d_2 + 2d_3 = 0 \\ d_3 \geq 0 \\ -d_1 + 6d_2 - d_3 < 0 \end{cases}$$

Esistono soluzioni al sistema (dunque il punto dato non é minimo). Una possibile soluzione si ottiene ponendo $d_3 = 0$, da cui $d_1 = -5d_2$ e $11d_2 < 0$. Scegliendo $d_2 = -1$ si ha

$$d = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{\max} = 1$$

(iii) Le condizioni di KKT sono:

ammissibiilità

$$\begin{aligned}&x_1+5x_2+2x_3=6\\&2x_1+x_2\geq 2\\&x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0\end{aligned}$$

stazionarietà

$$\begin{pmatrix}2x_1-4x_2+2x_3+1\\-4x_1+8x_2-4x_3+2\\2x_1-4x_2+2x_3+1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

complementarità

$$\begin{aligned}&\lambda_1(2-2x_1-x_2)=0\\&\lambda_2x_1=0,\ \lambda_3x_2=0,\ \lambda_4x_3=0\end{aligned}$$

non negatività $\lambda_i\geq 0,\quad i=1,\dots,4$

Nel punto $(1,\ 0,\ \frac{5}{2})^T$ deve necessariamente risultare $\lambda_2=\lambda_4=0$. Sostituendo nelle condizioni di stazionarietà si ottiene

$$\begin{gathered}8+\mu-2\lambda_1=0\\-12+5\mu-\lambda_1-\lambda_3=0\\8+2\mu=0\end{gathered}$$

Da cui $\mu=-4$, $\lambda_1=2$, $\lambda_3=-34$. Il punto NON soddisfa le KKT perché $\lambda_3\not\geq 0$.

Esercizio 3.

(i) per porre il problema nella forma standard è necessario introdurre una variabili di "surplus" $x_4\geq 0$ ottenendo così:

$$\begin{aligned}\min\quad &x_1+3x_2+x_3\\&x_1+5x_2+2x_3=6\\&2x_1+x_2-x_4=2\\&x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0\ x_4\geq 0\end{aligned}$$

(ii) Ricordando la caratterizzazione dei vertici ($\equiv$ definizione di SBA) di un poliedro in forma standard possiamo esaminare i seguenti casi

(a) $x_1=x_2=0$ (non ammissibile)

(b) $x_1=x_3=0$ (non ammissibile)

(c) $x_1=x_4=0$ (non ammissibile)

(d) $x_2=x_3=0$, $x_1=6, x_4=10$ (SBA)

(e) $x_2=x_4=0$, $x_1=1, x_3=\frac{5}{2}$ (SBA)

(f) $x_3=x_4=0$, $x_1=\frac{4}{9}\ x_2=\frac{10}{9}$ (SBA).

Consideriamo la SBA $\begin{pmatrix}6\\0\\0\\10\end{pmatrix}$; le variabili di base $x_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$, le variabili fuori base $x_N=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$; la matrice di base $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$.

(iii) La formula dei coefficienti di costo ridotto $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ richiede il calcolo dell'inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque sostituendo si ottine

$$\gamma^T = (\,3 \quad 1\,) - (\,1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\,-2 \quad -1\,)$$

Esercizio 4. (N.B. Il problema è lo stesso dell'esercizio 3)

(i) Il problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & 6u_1 + 2u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \le 1 \\ & 5u_1 + u_2 \le 3 \\ & 2u_1 \le 1 \\ & u_2 \ge 0 \end{aligned}$$

dalla soluzione grafica si determina il punto ottimo $u^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ di valore ottimo $b^T u^* = \frac{7}{2}$.

(ii) dalla teoria della dualità esiste una soluzione primale. Dalle cond. di complementarita‘ deriva che entrambi i vincoli del primale devono essere soddisfatti all'uguaglianza e che $x_2^* = 0$ deve essere zero (il secondo vincolo duale NON è attivo in u^*. Dunque si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{aligned} & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 \ge 0, \; x_2 = 0, \; x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. (N.B. il punto era stato gia‘ determinato come vertice dell'esercizio precedente.)

(iii) Il secondo vincolo è attivo e il valore della variabile duale (prezzo ombra) corrispondente è $\frac{1}{4}$ dunque la f.o. varia di $-\frac{1}{4}\varepsilon$.

Esercizio 3 (5 punti) Riordino le variabili secondo il rapporto peso/ingombro

$$\begin{aligned} & \max 6y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \le 7 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Si determina la soluzione del rilassamento $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^0 = 14$ e una soluzione intera (ottimo corrente) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $z_I = 12$. Separazione rispetto a y_3, si ottengono i due problemi

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 7 \qquad\qquad y_3 = 0 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \qquad (P^1)$$

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 4 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 3 \qquad\qquad y_3 = 1 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \qquad (P^2)$$

La soluzione del rilassamento di (P^1) è: $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^1 = 13.5$; non è possibile chiudere il problema (P^1). La soluzione del rilassamento di (P^2) è: $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^2 = 12$ pari all'ottimo corrente; il problema (P^2) si chiude.

Separazione di (P^1) rispetto a y_5, si ottengono i due problemi

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 0.8y_6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 7 \qquad\qquad y_5 = 0 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \qquad (P^3)$$

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 1.4 + 0.8y_6 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 5 \qquad\qquad y_5 = 1 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \qquad (P^4)$$

Si ottengono i valori $x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ di valore $U^3 = 13.6$ e $x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ INTERO di valore $U^4 = 13.4$ dunque si aggiorna l'ottimo corrente $z_I = 13.4$ e si chiude il problema (P^4).

Separazione di (P^3) rispetto a y_6, si ottengono i due problemi

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 7 \qquad\qquad y_6 = 0 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \qquad (P^5)$$

$$\begin{array}{c} \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 0.8 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 \le 5 \qquad\qquad y_6 = 1 \\ y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, 7. \end{array} \tag{P^6}$$

Si ottengono due soluzioni entrambe intere di valore inferiore all'ottimo corrente. I due problemi sono chiusi. NOn ci sono più problemi da analizzare. Dunque la soluzione è $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6

nodo	distanza	predecessore
1	0	$\emptyset$
2	1	1
3	3	2
4	4	3
5	3	3
6	6	$\{3, 4, 5, \}$
7	7	6
8	7	4

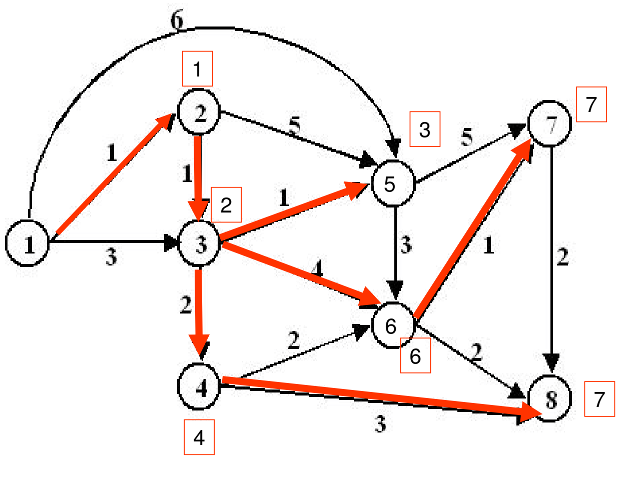

Figure 2: Grafo di esercizio