1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

1 luglio 2014

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**2.5 punti**) Una ditta produce leghe per la saldatura (L1,L2,L) a partire da tre elementi di base: stagno, zinco, rame. le leghe vendgono vendute in barre. le quantitá di elementi per ogni barra sono riportati in tabella insieme al guadagno derivante dalla vendita di barre di lega (in euro):

	L1	L2	L3
STAGNO	40	30	20
ZINCO	70	90	20
RAME	80	70	120
guadagno unitario	16	10	20

L'azienda possiede 300, 800, 1000 Kg di stagno, zinco e rame. Per vincoli di mercato il numero unità da barre L2 prodotto non può superare rispettivamente il il 40% del totale dei prodotti fabbricati. Definire un modello di PL per pianificare la produzione trimestrale massimizzando il profitto complessivo.

Esercizio 2. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 - 200x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 6 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Dire se il problema è convesso/concavo.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari NON vincolati, studiarne la natura e dire se possono essere punti di KKT del problema vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (-3,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (-3,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 - 3x_2 \geq 3 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (2,\ 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - 6x_2 + 3x_3 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Sia $x^0 = (\frac{2}{5},\ \frac{12}{5})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo il interezza); sia $x_I = (0,\ 0)^T$ una soluzione intera.

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**2 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_2;

(iii) Dire se é possibile chiudere i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ specificando le motivazioni. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.