1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

17 settembre 2013

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^3} \; x_1^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2 + x_3$$

(i) (**1,5 punto**) Dire se la funzione è\non è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare, se esiste, un punto stazionario e studiarne la natura.

(iii) (**1,5 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbb{R}^3} \quad & x_1^2 + \tfrac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
& 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) (**0.5 punti**) Dire se il punto determinato al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di KKT.

(ii) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ 2,\ 1)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, dire se nel punto $\hat{x} = (1,\ 2,\ 1)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta e calcolare i moltiplicatori.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il poliedro

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (1,\ 2, 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) (**3 punti**) Scrivere i vertici del poliedro originale e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Considerato poi l'obiettivo

$$\min\ 3x_1 + 6x_2 - x_3$$

, scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (NB ìl problema derivato dall'Esercizio 3)

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 6x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -1 a $-1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Si consideri il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Sia $\hat{x} = (1,\ 0)^T$ una soluzione ammissibile intera.

Rispondere ai seguenti quesiti.

(i) (**0,5 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound (usare la soluzione grafica);

(ii) (**0,5 punti**) dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scegliere una variabile di branching e scrivere i primi due problemi generati per separazione rispetto a tale variabile;

(iii) (**2 punti**) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le eventuali soluzioni ottime dei due sottoproblemi;

(iv) (**2 punti**) scegliere uno dei due problemi e dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro.