

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (BATR 9 cfu)
18 settembre 2014

Cognome

Nome

VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (4,5 punti)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- (i) **(1, punto)** Dire se la funzione è/non è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.
- (ii) **(1,5 punti)** Determinare, se esistono, punti stazionari e studiarne la natura.
- (iii) **(0,5 punto)** Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1, 0, 1)^T$.

Esercizio 2. (8 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(0.5 punti)** Dire se uno dei punti determinati al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di minimo.
- (ii) **(1 punti)** Dire se il problema è convesso/concavo.

- (iii) (2,5 punti) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (2, -4, 0)^T$.
- (iv) (2 punti) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (2, -4, 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) (1,5 punto) Dato il punto $\hat{x} = (5, 2, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} .
- (ii) (3 punti) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{26}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iii) (0,5 punto) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del semplice (Ax = b, x ≥ 0 con b ≥ 0).
- (iv) (2 punti) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) (1,5 punto) Scrivere il problema duale.
- (ii) (2 punti) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) (3 punti) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

- (iv) (2 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -2 a $-2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e “sufficientemente piccolo”.

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + 8x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

Sia $x^0 = (\frac{29}{5}, -\frac{2}{5})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo di interezza); sia $x_I = (7, 0)^T$ una soluzione intera.

- (i) (1 punto) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;
- (ii) (2 punti) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1 ;
- (iii) Dire se è possibile chiudere i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ specificando le motivazioni. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.