1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

18 settembre 2014

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**2.5 punti**) Un'azienda produce carbone in $M = 3$ diverse miniere e deve consegnarlo a $N = 4$ diversi clienti. Le miniere hanno una capacità produttiva Q_i $i = 1, \dots, M$ e il carbone è caratterizzato dal contenuto di cenere e di zolfo (per ton) e da un costo di estrazione (euro/ton) che dipendono dalla miniera come riportato in tabella

	cenere ton	zolfo ton	costo euro/ton	capacità ton
miniera 1	0,08	0,05	50	120
miniera 2	0,06	0,04	55	100
miniera 3	0,04	0,03	62	140

I clienti hanno una richiesta di carbone riportata in tabella

	cliente 1	cliente 2	cliente 3	cliente 4
domanda	80	70	60	40

Il trasporto da una miniera al cliente ha un costo (euro/ton) c_{ij} riportato in tabella

	cliente 1	cliente 2	cliente 3	cliente 4
miniera 1	4	6	8	12
miniera 2	9	6	7	11
miniera 3	8	12	3	5

Inoltre il carbone trasportato ad ogni singolo cliente j deve avere un contenuto massimo di cenere e solfo pari rispettivamente 6%, e 3,5%. Formulare il modello di PL per determinare la strategia di trasporto ottima

Esercizio 2. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min_{x\in I\!R^3} \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**2 punti**) Dire se il problema è convesso/concavo.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari NON vincolati, studiarne la natura e dire se possono essere punti di KKT del problema vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (2, \ -4, \ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (2, \ -4, \ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (5, \ 2, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{26}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b, \ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- **(i)** (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.
- **(ii)** (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- **(iii)** (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- **(iv)** (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 8 a $8 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_1 + 8x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Sia $x^0 = (\frac{29}{5},\ -\frac{2}{5})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo il interezza); sia $x_I = (7,\ 0)^T$ una soluzione intera.

- **(i)** (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;
- **(ii)** (**2 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1;
- **(iii)** Dire se é possibile chiudere i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ specificando le motivazioni. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.