1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BATR 9 cfu)

1 luglio 2014

Cognome	Nome	VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**4,5 punti**)

$$\min_{\mathbb{R}^2} 2x_1^2 + 3x_2^3 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + 4x_1 + x_2$$

(i) (**1, punto**) Dire se la funzione è\non è convessa (strettamente o non) o concava giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare, se esistono, punti stazionari e studiarne la natura.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbb{R}^2} \quad & 2x_1^2 + 3x_2^3 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + 4x_1 + x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1 - 9x_2 \leq 9 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) (**0.5 punti**) Dire se uno dei punti determinati al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di KKT del problema vincolato..

(ii) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_2 - 2x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (4,\ 1, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_2 - 2x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -2 a $-2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1 - 2x_2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& 4x_1 - 2x_2 \leq 9 \\
& -x_1 - x_2 \leq -2 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x \text{ intero}
\end{array}
$$

Sia $x^0 = (\frac{9}{2},\ \frac{9}{2})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo il interezza); sia $x_I = (2,\ 0)^T$ una soluzione intera.

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**2 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1;

(iii) Dire se é possibile chiudere i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ specificando le motivazioni. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.