1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

1 luglio 2014

Cognome	Nome

VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**2.5 punti**) Un'azienda manifatturiera fabbrica quattro modelli differenti M1, M2, M3, M4 di un prodotto. Per produrre tali modelli sono utilizzati quattro differenti robot R1, R2, R3, R4. Ciascun modello per essere pronto alla vendita deve essere lavorato su tutti e quattro i robot. I tempi unitari necessari (in ore) per produrre ciascuno dei quattro modelli su ciascun robot sono riportati nella seguente tabella insieme al prezzo unitario di vendita di ciascun modello:

	M1	M2	M3	M4
R1	4	6	5	5
R2	4	5	4	6
R3	4	3	3	8
R4	7	6	5	5
prezzo unitario	580	350	450	600

Per vincoli di mercato il numero unità di ciascun modello prodotto non può superare rispettivamente il 30%, il 40%, il 50% e il 60% del totale dei prodotti fabbricati. Definire un modello di PL per pianificare la produzione trimestrale massimizzando il profitto complessivo e sapendo che in tutto devono essere prodotti almeno 70 prodotti e che nel trimestre i quattro robot sono disponibili rispettivamente per 400, 300, 400, 450 ore.

Esercizio 2. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min_{\mathbb{R}^2} \quad 2x_1^2 + 3x_2^3 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + 4x_1 + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 - 9x_2 \leq 9$$

$$x_2 \geq 0$$

(i) (**2 punti**) Dire se il problema è convesso/concavo.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari NON vincolati, studiarne la natura e dire se possono essere punti di KKT del problema vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_2 - 2x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (4,\ 1, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 9x_2 - 2x_3 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -2 a $-2+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Sia $x^0 = (\frac{9}{2},\ \frac{9}{2})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo il interezza); sia $x_I = (2,\ 0)^T$ una soluzione intera.

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**2 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1;

(iii) Dire se é possibile chiudere i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ specificando le motivazioni. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.