1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BLTR 9 cfu)

20 dicembre 2013

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{I\!R^3} \; x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3$$

(i) (**1,5 punto**) Dire se la funzione è\non è convessa/concava (strettamente o non) giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare, se esiste, un punto stazionario e studiarne la natura.

(iii) (**1,5 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - y_3 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**0.5 punti**) Dire se il punto determinato al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di KKT.

(ii) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - 10x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - y_3 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (1,\ 2, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scegliere i vertci individuati al punto (iii) e scrivere le corrispondenti SBA del poliedro in forma standard. Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - 10x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - y_3 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di knapsack $\{0, 1\}$.

$$\begin{array}{ll} \max & 6.3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 + 4.5x_5 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 7 \\ & x \in \{0, 1\}^5 \end{array}$$

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**4 punti**) Determinare la soluzione ottima utilizzando il metodo del Branch and Bound.